CHAPITRE III

EXPRESSION SIMPLIFIEE DES REPARTITIONS DE LUMINANCE DANS LE CADRE D'UNE APPROXIMATION DU PREMIER ORDRE

1) INTRODUCTION

Le chapitre précédent décrivait les méthodes numériques de simulation des répartitions de luminance observables sur les facettes réflectrices d'un système collecteur d'énergie solaire donné. Il importe à présent de savoir dans quelle mesure les défauts de réglage des facettes modifient ces répartitions de luminance, afin de définir une procédure, basée sur un système de relations simples, qui permette de remonter aux erreurs de réglage. Dans ce but, et sachant que celles-ci sont de l'ordre de quelques milliradians au maximum, nous avons pensé à utiliser une approximation, que nous souhaitions du premier ordre, afin d'éviter des calculs trop complexes. Mais les études de Teplyakov [77] sur la possibilité d'adapter la théorie des aberrations géométriques du troisième ordre à des concentrateurs solaires de grande ouverture avaient conduit à rejeter formellement ce type d'approximation; à plus forte raison, l'approximation de Gauss ne pouvait non plus nous convenir. Nous avons donc choisi, à l'échelle d'une facette réflectrice, ou au maximum d'un héliostat, une approximation hybride, permettant d'introduire les défauts de réglage des facettes et les défauts de pointage des héliostats, et qui consiste à ne développer au premier ordre que les seuls termes liés à l'ouverture de la facette sans modifier les autres, et en particulier ceux qui sont caractéristiques de la géométrie soleil-facette-plan cible. Ceci nous a conduits à une expression approchée de l'angle ϵ, défini dans le chapitre précédent, à partir de laquelle il est possible de déterminer les distributions de luminance observables sur une facette réflectrice en fonction de son relief, du type de structure sur laquelle elle est montée (héliostat ou concentrateur fixe), des défauts de réglage et de pointage introduits, et de la position exacte du point d'observation M'.

2) LES TERMES DE L'APPROXIMATION

On considère sur la figure III-1 une facette réflectrice rapportée à un repère Roi (OiXoiYoiZoi). Celle-ci est montée sur un héliostat, auquel est lié le repère Ro(OXoYoZo), et qui réfléchit les rayons solaires incidents vers un plan récepteur rapporté au repère R'(O'X'Y'Z'). On reprend en fait les notations du paragraphe

5.2.1 du chapitre II, et on désignera donc respectivement par (X_p,Y_p,Z_p),(X_{oi},Y_{oi},Z_{oi}) et $(0,Y',Z')$ les coordonnées d'un point P de la facette réflectrice dans Roi, les coordonnées du centre Oi de la facette dans Ro, et celles d'un point M' du plan récepteur dans R'. Enfin i_o est l'angle que fait la normale à l'héliostat $\vec{N_o}$ avec le vecteur soleil $\vec{S_o}$. Dans le cas plus simple d'un concentrateur fixe, on considèrera que le repère Ro n'existe pas.

En général, et sur les deux types d'installations solaires que nous considérons (simple et double réflexion), les angles d'incidence i_o du rayonnement solaire sur les facettes réflectrices ne seront jamais nuls, ni même négligeables. Si tel était le cas, cela voudrait dire que le soleil, le système récepteur, et la facette réflectrice sont alignés : cela est en principe possible, mais alors le système récepteur lui-même ferait ombre sur la facette, et la contribution d'éclairement en provenance de celle-ci serait nulle. Cette configuration, où la facette travaille sur son axe, ne présente donc pas d'intérêt pratique, et les facettes qui contribueront effectivement à l'éclairement du système récepteur sont celles qui travaillent en dehors de leur axe. Sur le concentrateur fixe du four de 1000 kW d'Odeillo, l'angle i_o peut atteindre 37 degrés pour certaines facettes situées sur sa périphérie, tandis que dans le cas des héliostats d'une centrale à tour, il dépend de la position du soleil dans le ciel, et prend des valeurs encore plus importantes à certains moments de la journée (par exemple 55 degrés au début de la matinée, pour un héliostat implanté à l'est de la tour).

Il n'était donc pas question d'effectuer des développements limités sur l'angle i_o; par contre, nous avons retenu l'hypothèse suivante : les dimensions des facettes réflectrices, des héliostats, et des taches-image qu'ils forment dans le plan récepteur, restent faibles devant les distances qui séparent les facettes du plan récepteur. Si D_i est la distance $|OiO'|$ (fig. III-1), les infiniment petits que nous choisirons sont donc Y_p/D_i et Z_p/D_i sur la surface du miroir, Y'/D_i et Z'/D_i dans le plan récepteur, et Y_{oi}/D_i et Z_{oi}/D_i dans le cas des héliostats plans ou focalisants. En particulier les fonctions caractéristiques $f(Y_p,Z_p)$ du relief des facettes réflectrices, ainsi que leurs dérivées partielles f'_y et f'_z, que nous avons explicitées dans le chapitre précédent, seront développées en fonction de Y_p/D_i et Z_p/D_i, et il en sera de même pour la fonction caractéristique $g(Y_{oi},Z_{oi})$ du support des modules réflecteurs de

l'héliostat focalisant CETHEL III bis, qui sera développée en fonction de Y_{oi}/D_i et Z_{oi}/D_i. Le choix de ces infiniment petits se justifie dans la mesure où l'ouverture apparente des surfaces réflectrices ne dépasse jamais 1,2 degré dans le cas des facettes et modules réflecteurs du concentrateur et des héliostats étudiés ici, et 2,5 degrés pour un héliostat considéré dans sa totalité. Ces valeurs ont d'ailleurs été obtenues dans les cas les plus défavorables (héliostats focalisants les plus rapprochés de la tour, facettes peu éloignées de l'axe du concentrateur, etc...)

A ces six infiniment petits, nous avons adjoint quatre autres, spécifiques aux installations solaires, et qui sont du même ordre de grandeur : il s'agit des défauts de réglage en azimut et en hauteur a_r et h_r des facettes réflectrices, et des défauts de pointage en azimut et en hauteur a_p et h_p des héliostats. Il nous faut maintenant développer l'expression approchée de ϵ, qui est déterminé par la relation (II-4), en fonction de tous ces infiniment petits, et dans différents cas de figure : nous avons en effet trois surfaces réflectrices différentes à étudier, qui peuvent être constituées de facettes de divers types.

Nous commencerons par déterminer les expressions approchées des vecteurs $\overrightarrow{PM'}$ et $\overrightarrow{R_{po}}$ dans Rri. Ceci fait l'objet des paragraphes suivants.

3) EXPRESSION DU VECTEUR $\overrightarrow{PM'}$

Nous reprenons ici l'expression des composantes de $\overrightarrow{PM'}$ dans Rri que nous avons donnée au paragraphe 7.1 du chapitre II (relation II-40)), avec X'=0. On obtient alors :

$$\overrightarrow{PM'} = \begin{cases} D_i + p'_{12}Y' + p'_{13}Z' - p_{11}X_p - p_{12}Y_p - p_{13}Z_p \\ p'_{22}Y' + p'_{23}Z' - p_{21}X_p - p_{22}Y_p - p_{23}Z_p \\ p'_{32}Y' + p'_{33}Z' - p_{31}X_p - p_{32}Y_p - p_{33}Z_p \end{cases} \quad \text{(III-1)}$$

On procède maintenant aux changements de variables suivants :

$$\begin{cases} U' = p'_{12}\,Y' + p'_{13}\,Z' \\ V' = p'_{22}\,Y' + p'_{23}\,Z' \\ W' = p'_{32}\,Y' + p'_{33}\,Z' \end{cases} \quad \text{(III-2)}$$

et

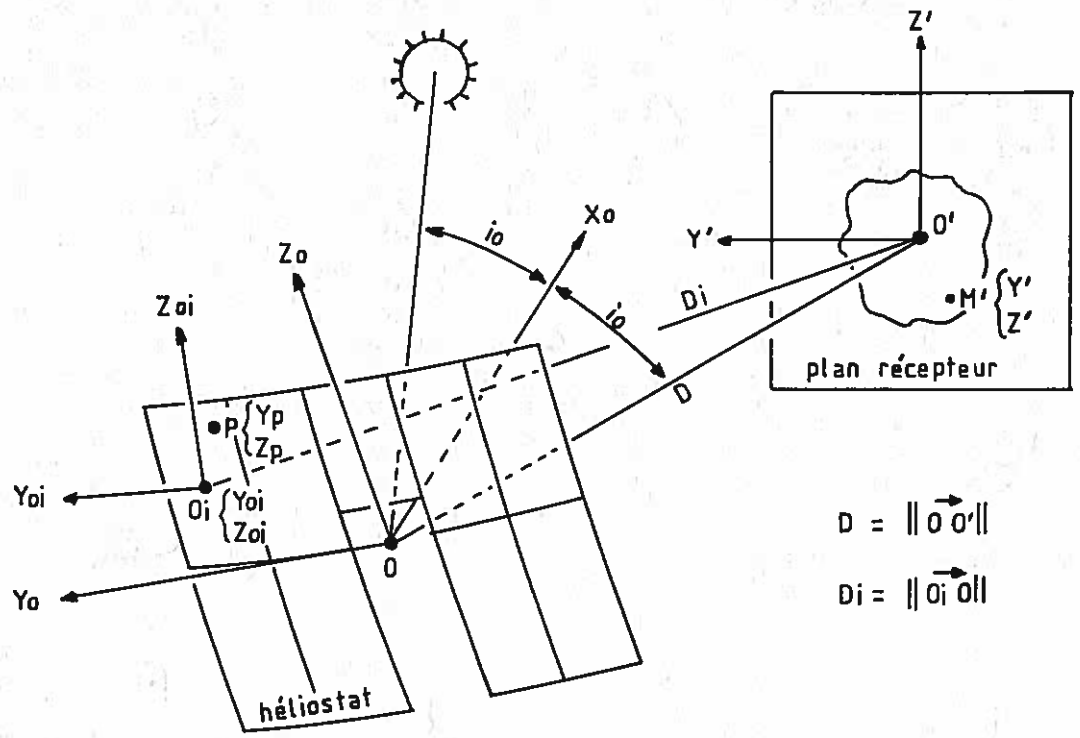


fig III-1 : Les termes de l'approximation du premier ordre.

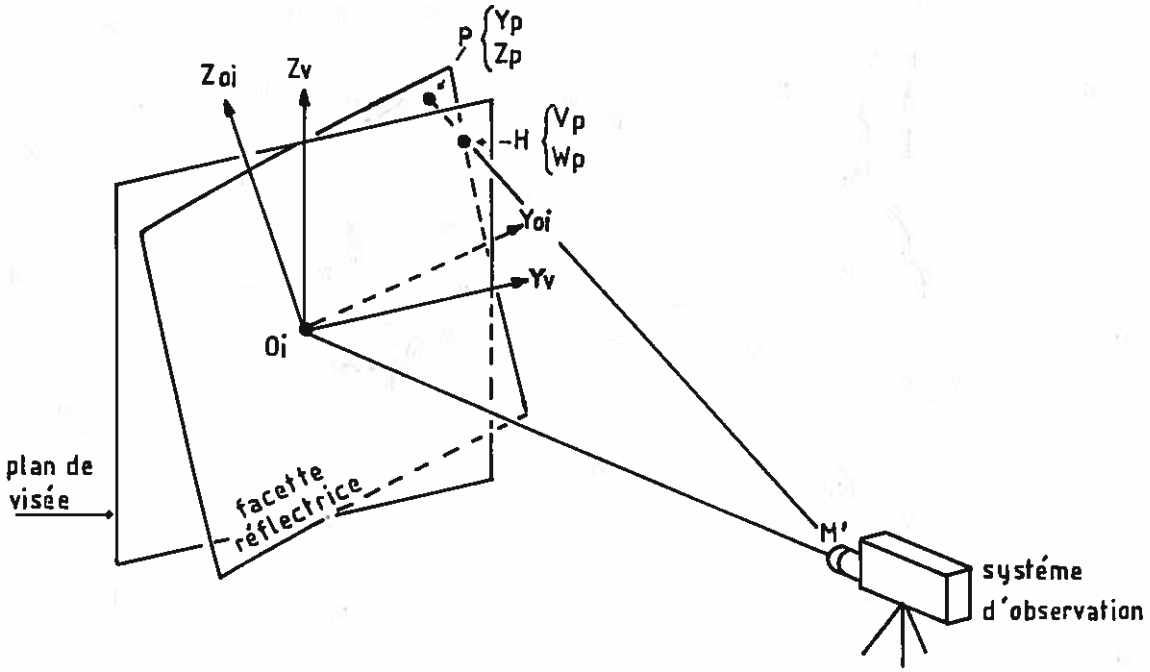


fig III-2 : Système de coordonnées héliostat (Y_p,Z_p) et de coordonnées apparentes (V_p,W_p) sur le plan de visée.

$$\begin{cases} U_p = p_{12}\, Y_p + p_{13}\, Z_p \\ V_p = p_{22}\, Y_p + p_{23}\, Z_p \\ W_p = p_{32}\, Y_p + p_{33}\, Z_p \end{cases} \qquad \text{(III-3)}$$

Par ailleurs X_p est égal à $f(Y_p,Z_p)$, qui est la fonction caractéristique du relief de la facette réflectrice. La relation (III-1) peut donc se mettre sous la forme :

$$\overrightarrow{PM'} = D_i \begin{cases} 1 + \dfrac{U'-U_p}{D_i} - p_{11}\, \dfrac{f(Y_p,Z_p)}{D_i} \\ \dfrac{V'-V_p}{D_i} - p_{21}\, \dfrac{f(Y_p,Z_p)}{D_i} \\ \dfrac{W'-W_p}{D_i} - p_{31}\, \dfrac{f(Y_p,Z_p)}{D_i} \end{cases} \qquad \text{(III-4)}$$

$\frac{U'-U_p}{D_i}$, $\frac{V'-V_p}{D_i}$ et $\frac{W'-W_p}{D_i}$ sont des infiniment petits du premier ordre, puisqu'ils peuvent être liés à $\frac{Y_p}{D_i}$, $\frac{Z_p}{D_i}$, $\frac{Y'}{D_i}$ et $\frac{Z'}{D_i}$ par les systèmes de relations linéaires (III-2) et (III-3). Il n'en est pas de même des termes en $\frac{f(Y_p,Z_p)}{D_i}$, qui sont du second ordre par rapport à $\frac{Y_p}{D_i}$ et $\frac{Z_p}{D_i}$, et ceci pour tous les types de relief que nous attribuerons aux facettes réflectrices; on pourra s'en convaincre à la lecture du paragraphe 5 où les cas des facettes toroïdales, planes, cylindriques, sphériques, et localement paraboloïdales seront successivement abordés. Nous éliminons donc les termes en $\frac{f(Y_p,Z_p)}{D_i}$ dans la relation (III-4), ce qui nous permet de réécrire les composantes de $\overrightarrow{PM'}$ dans Rri, limitées au premier ordre :

$$\overrightarrow{PM'} \approx D_i \begin{cases} 1 + \dfrac{U'-U_p}{D_i} \\ \dfrac{V'-V_p}{D_i} \\ \dfrac{W'-W_p}{D_i} \end{cases} \qquad \text{(III-5)}$$

On en déduit la norme du vecteur PM', développée au premier ordre :

$$\|\overrightarrow{PM'}\| \approx D_i \left[1 + \frac{U'-U_p}{D_i}\right] \qquad \text{(III-6)}$$

et on arrive enfin aux cosinus directeurs du vecteur unitaire dirigé suivant l'axe PM', exprimés au premier ordre dans Rri :

$$\frac{\overrightarrow{PM'}}{||PM'||} = \begin{vmatrix} 1 \\ \frac{V'-V_p}{D_i} \\ \frac{W'-W_p}{D_i} \end{vmatrix} \qquad \text{(III-7)}$$

Par ailleurs, nous attirons l'attention sur les deux dernières relations du système (III-3) :

$$\begin{cases} V_p = p_{22}\, Y_p + p_{23}\, Z_p \\ W_p = p_{32}\, Y_p + p_{33}\, Z_p \end{cases} \qquad \text{(III-8)}$$

dont les termes V_p et W_p peuvent en effet être interprétés de la façon suivante : dans le cas où le point d'observation M' est confondu avec l'origine O' du plan récepteur, et que le point visé par le système d'observation est le centre Oi de la facette réflectrice considérée, les repères Rv et Rri sont confondus et V_p et W_p sont alors les coordonnées dans Rri de la projection H du point P sur le plan de visée OiYvZv (voir la figure III-2. On se reportera également au paragraphe 8 du chapitre II). Il s'agit bien sûr de relations approchées, qui s'obtiennent en développant au premier ordre les relations exactes (II-48) et (II-50).

En pratique, ce système de coordonnées (V_p, W_p) présente au moins autant d'intérêt que le système (Y_p,Z_p), puisqu'il permet d'établir les équations des courbes iso-luminance telles qu'elles apparaissent du point d'observation, et non pas telles qu'elles sont inscrites sur la surface réflectrice. Nous serons donc amenés à l'utiliser systématiquement, sous réserve que les relations (III-8) soient inversibles. Pour cela, il est nécessaire que :

$$p_{22}\, p_{33} - p_{23}\, p_{32} \neq 0$$

Nous verrons par la suite que cette condition est satisfaite lorsque l'angle d'incidence du rayonnement solaire i_o n'est pas voisin de 90°. De même que dans le cadre de l'approximation de Courrèges, nous supposons donc qu'il n'y a pas d'incidences rasantes.

4) EXPRESSION DU VECTEUR $\overrightarrow{R_{po}}$

Ce calcul s'effectue évidemment par la loi de Descartes (relation (II-5)); il nécessite donc la connaissance précise des composantes du vecteur unitaire $\overrightarrow{N_p}$, normal à la surface réflectrice

en P. Dans l'expression de celles-ci interviennent des facteurs aussi divers que les défauts de pointage et de réglage, le type de la structure étudiée (héliostat focalisant, plan, ou concentrateur fixe), et le relief de la facette réflectrice elle-même. L'introduction de ce dernier se fera dans le paragraphe 5. Jusque-là, nous nous bornerons à le représenter par les dérivées partielles f'_y et f'_z de la fonction caractéristique $f(Y_p,Z_p)$, sans plus expliciter celles-ci. En fait, nous considérons essentiellement ici l'influence du type de la structure qui supporte les facettes réflectrices , et de ses défauts spécifiques.

4.1) Composition des matrices au premier ordre

On considère figure III-3 trois repères orthonormés R_0 $(OX_0Y_0Z_0)$, $R_1(OX_1Y_1Z_1)$ et $R_2(OX_2Y_2Z_2)$ infiniment voisins, et qui satisfont aux conditions suivantes : la matrice de passage P_{01} du repère R_0 au repère R_1 est de type P_1 (voir le paragraphe 5.1 du chapitre II), et il en est de même pour la matrice de passage P_{12} de R_1 à R_2. On peut donc légitimement se servir de la relation (II-24) afin d'obtenir les expressions générales de leurs coefficients.

On suppose maintenant que le vecteur unitaire $\vec{N_1}$ auquel est lié l'axe OX_1 de R_1, est repéré par ses angles en azimut et en hauteur a_1 et h_1 dans le repère R_0 (fig.III-3). Si a_1 et h_1 sont des infiniment petits du premier ordre, l'expression approchée des cosinus directeurs de $\vec{N_1}$ dans R_0 est :

$$\vec{N_1} = \begin{cases} \cos a_1 \cos h_1 \approx 1 \\ \sin a_1 \cos h_1 \approx a_1 \\ \sin h_1 \approx h_1 \end{cases}$$

et on en déduit par la relation (II-24) les coefficients de la matrice P_{01} développés au premier ordre :

$$P_{01} \approx \begin{bmatrix} 1 & -a_1 & -h_1 \\ a_1 & 1 & 0 \\ h_1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De même, le vecteur unitaire $\vec{N_2}$, qui dirige l'axe OX_2, est repéré par ses angles en azimut et en hauteur a_2 et h_2 dans R_1 (fig.III-3). a_2 et h_2 étant eux aussi des infiniment petits, les cosinus directeurs de $\vec{N_2}$ dans R_1 sont $(1, a_2, h_2)$ et l'expression de la matrice P_{12} est, au premier

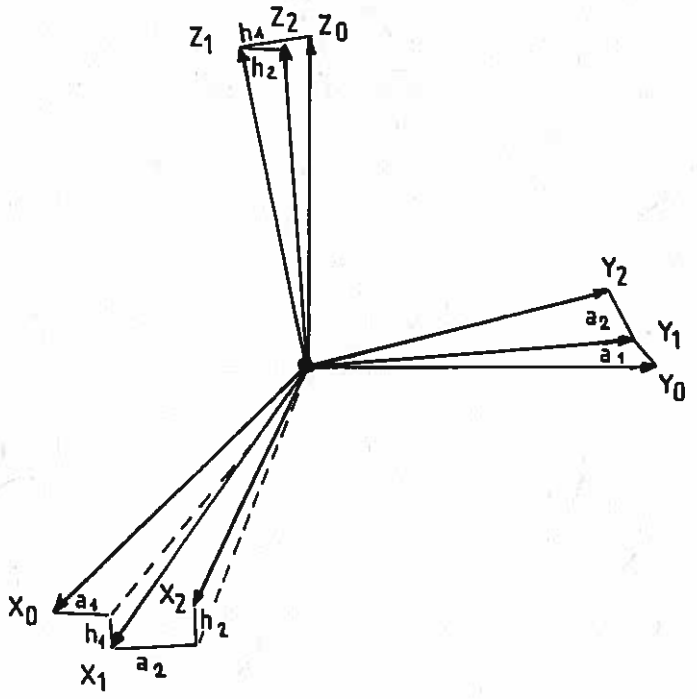


fig III-3 : Composition des matrices au premier ordre.

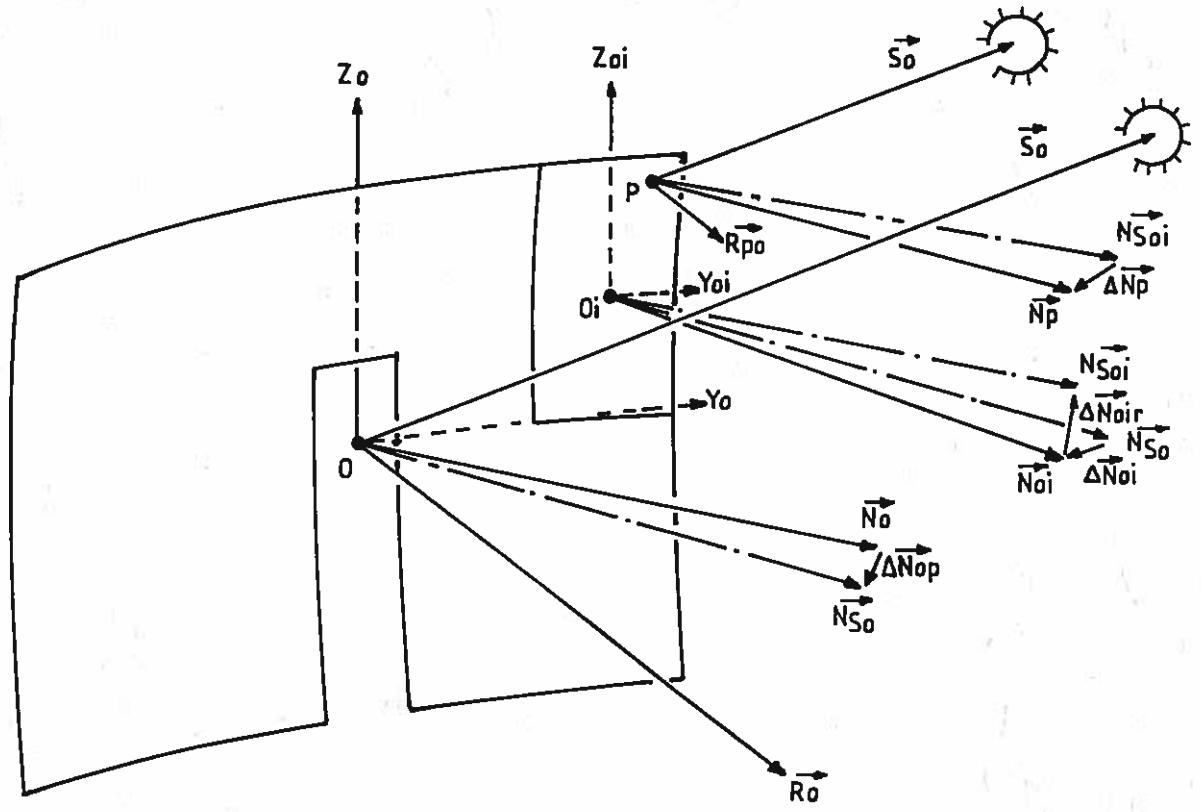


fig III-4 : Calcul de $\vec{N_p}$ dans Ro dans le cas de l'héliostat focalisant.

ordre :

$$P_{12} \approx \begin{bmatrix} 1 & -a_2 & -h_2 \\ a_2 & 1 & 0 \\ h_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La composition de ces deux matrices nous permet de déterminer la matrice de passage P_{02} de R_0 à R_2 qui s'écrit, au premier ordre :

$$P_{02} \approx \begin{bmatrix} 1 & -(a_1+a_2) & -(h_1+h_2) \\ a_1+a_2 & 1 & 0 \\ h_1+h_2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Par ailleurs, l'expression des cosinus directeurs du vecteur $\overrightarrow{N_2}$ dans le repère R_0 est donnée par la première colonne de la matrice P_{02}. On a donc, toujours au premier ordre :

$$\overrightarrow{N_2} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ a_1+a_2 \\ h_1+h_2 \end{bmatrix}$$

On constate que dans le cas d'un ensemble de repères infiniment voisins liés entre eux par des matrices de type P_1, la composition des matrices se fait par addition des infiniment petits qui caractérisent, en azimut et en hauteur, le passage d'un repère à l'autre, et qu'il en est de même pour le calcul des composantes d'un vecteur voisin de l'axe principal du repère de départ. Cette propriété nous sera particulièrement utile lors de la prise en compte des infiniment petits qui interviennent dans l'expression de $\overrightarrow{N_p}$.

4.2) Cas d'un héliostat focalisant

4.2.1) Héliostat réglé sur son axe

On sait que $\overrightarrow{R_{po}}$ est lié à $\overrightarrow{N_p}$ par l'expression vectorielle de la loi de Descartes; nous commencerons donc par déterminer les cosinus directeurs du vecteur $\overrightarrow{N_p}$ dans Ro : dans tout ce paragraphe, nous nous réfèrerons aux repères qui ont été définis dans le chapitre précédent, pour le cas de l'héliostat focalisant (paragraphe 5.2.1). A ces derniers, il est nécessaire d'adjoindre un repère Rso lié à

l'héliostat après introduction de son défaut de pointage (fig.III-4). La normale réelle à l'héliostat $\overrightarrow{N_{\delta o}}$, qui dirige l'axe principal de ce nouveau repère, s'exprime alors dans le repère Ro en fonction des infiniment petits a_p et h_p :

$$\overrightarrow{N_{\delta o}} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ a_p \\ h_p \end{bmatrix}$$

et la matrice de passage de Ro à Rδo est de type P_1.

Par ailleurs, il est équivalent d'écrire que :

$$\overrightarrow{N_{\delta o}} = \overrightarrow{N_o} + \overrightarrow{\Delta N_{op}}$$

où $\overrightarrow{\Delta N_{op}}$ a pour composantes $(0, a_p, h_p)$ au premier ordre, dans le repère Ro.

Le repère Roi, qui est lié au module réflecteur considéré, est voisin du repère Rδo (fig.III-4). Or nous avons vu au chapitre précédent (paragraphe 5.2.5.1) que la matrice de passage de Rδo à Roi était de type P_1. De plus, les cosinus directeurs de $\overrightarrow{N_{oi}}$ dans Rδo ont été définis par les relations (II-35) et (II-12). Développées au premier ordre, ces dernières s'écrivent :

$$\overrightarrow{N_{oi}} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{Y_{oi}}{2f_H} \\ -\frac{Z_{oi}}{2f_H} \end{bmatrix}$$

$\overrightarrow{N_{oi}}$ peut également se mettre sous la forme :

$$\overrightarrow{N_{oi}} = \overrightarrow{N_{\delta o}} + \overrightarrow{\Delta N_{oi}}$$

où $\overrightarrow{\Delta N_{oi}}$ a pour composantes $\left[0, -\frac{Y_{oi}}{2f_H}, -\frac{Z_{oi}}{2f_H}\right]$ au premier ordre, dans le repère Rδo. Ces termes en $\frac{Y_{oi}}{f_H}$ et $\frac{Z_{oi}}{f_H}$ résultent bien sûr de la sphéricité de l'héliostat.

Le repère Rδoi, qui est attaché au module après introduction de ses défauts de réglage, est à son tour voisin du repère Roi, et la matrice qui permet de passer de Roi à Rδoi est également de type P_1 (voir le paragraphe 6 du chapitre précédent). Les cosinus directeurs du vecteur $\overrightarrow{N_{\delta oi}}$ s'expriment dans le repère Roi en fonction des infiniment petits a_r et h_r :

$$\overrightarrow{N_{\delta oi}} \approx \begin{vmatrix} 1 \\ a_r \\ h_r \end{vmatrix}$$

ce que l'on peut écrire :

$$\overrightarrow{N_{\delta oi}} = \overrightarrow{N_{oi}} + \overrightarrow{\Delta N_{oir}}$$

où $\overrightarrow{\Delta N_{oir}}$ a pour composantes $(0, a_r, h_r)$, toujours au premier ordre, et dans le repère Roi.

Enfin, il faut introduire le relief du module réflecteur lui-même. Le calcul exact des composantes du vecteur $\overrightarrow{N_p}$ dans Rδoi a été explicité au paragraphe 7.2 du deuxième chapitre (relations (II-41) et (II-42)). En admettant que les dérivées partielles $\partial f/\partial Y_p\ (Y_p, Z_p)$ et $\partial f/\partial Z_p\ (Y_p, Z_p)$ de la fonction caractéristique du relief des modules, que l'on note respectivement f'_y et f'_z, sont des infiniment petits du premier ordre (ceci sera justifié plus loin), on peut alors donner une expression approchée des cosinus directeurs de $\overrightarrow{N_p}$:

$$\overrightarrow{N_p} \approx \begin{vmatrix} 1 \\ - f'_y \\ - f'_z \end{vmatrix}$$

soit :

$$\overrightarrow{N_p} = \overrightarrow{N_{\delta oi}} + \overrightarrow{\Delta N_p}$$

où $\overrightarrow{\Delta N_p}$ a pour composantes $(0, - f'_y, - f'_z)$ au premier ordre dans le repère Rδoi :

En résumé, nous pouvons finalement écrire :

$$\overrightarrow{N_p} = \overrightarrow{N_o} + \overrightarrow{\Delta N}$$

avec : $\overrightarrow{\Delta N} = \overrightarrow{\Delta N_{op}} + \overrightarrow{\Delta N_{oi}} + \overrightarrow{\Delta N_{oir}} + \overrightarrow{\Delta N_p}$ (III-9)

et, en se servant du résultat préliminaire établi au paragraphe précédent, donner l'expression approchée des composantes de $\overrightarrow{\Delta N}$ dans Ro :

$$\overrightarrow{\Delta N} = \begin{vmatrix} 0 \\ a_p + a_r - \dfrac{Y_{oi}}{2f_H} - f'_y \\ h_p + h_r - \dfrac{Z_{oi}}{2f_H} - f'_z \end{vmatrix} \qquad \text{(III-10)}$$

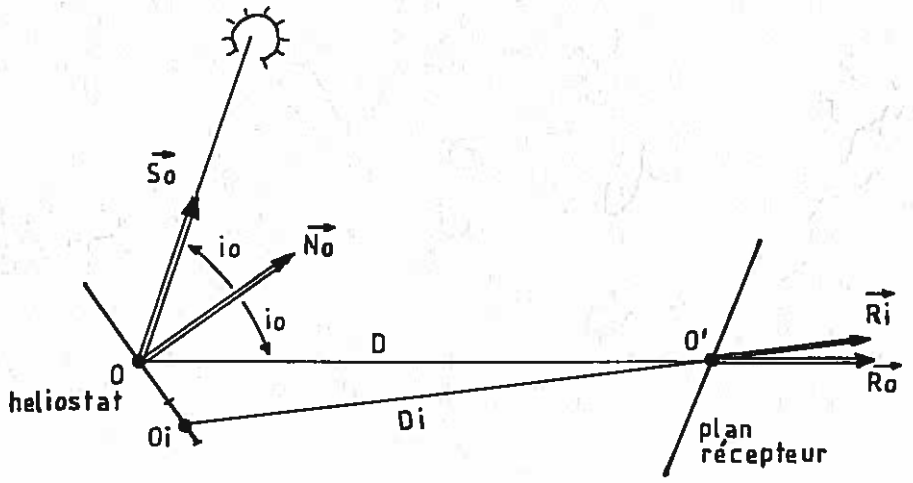


fig III-5 : Développement de $\vec{R_i}$ en fonction de $\vec{R_o}$ et $\vec{OOi}/D$.

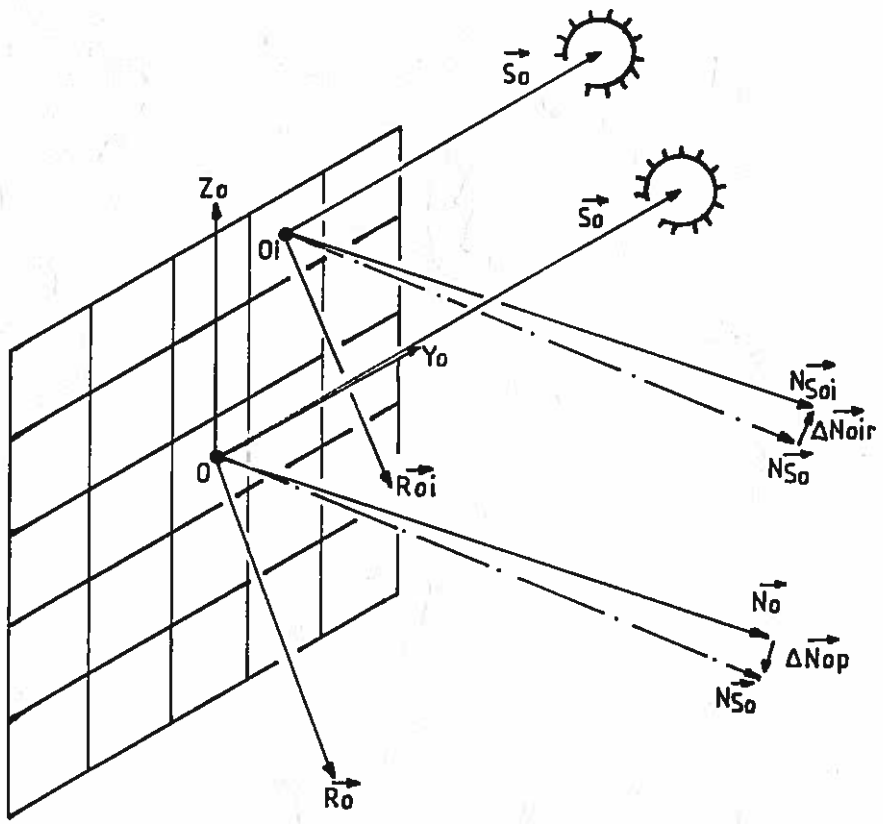


fig III-6 : Calcul de $\vec{N_{Soi}}$ dans Ro dans le cas de l'héliostat plan.

Nous réécrivons maintenant l'expression vectorielle de la loi de Descartes :

$$\vec{R_{po}} = 2(\vec{S_o}\vec{N_p})\ \vec{N_p} - \vec{S_o} \qquad \text{(II-5)}$$

En tenant compte de la relation (III-9), on trouve que :

$$\vec{R_{po}} = 2\ [\vec{S_o}\vec{N_o} + \vec{S_o}\vec{\Delta N}](\vec{N_o} + \vec{\Delta N}) - \vec{S_o}$$

et, en ne conservant que les termes du premier ordre :

$$\vec{R_{po}} \approx \vec{R_o} + 2[\ (\vec{S_o}\vec{N_o})\ \vec{\Delta N} + (\vec{S_o}\vec{\Delta N})\ \vec{N_o}]$$

où $\vec{R_o}$ est le vecteur cible défini par la relation (II-25).
On sait que $\vec{S_o}\vec{N_o} = \vec{N_o}\vec{R_o} = \cos i_o$; on rappelle que i_o est l'angle d'incidence des rayons solaires sur la surface de l'héliostat (fig. III-1). Par ailleurs, en multipliant les termes de la relation (II-25) par $\vec{\Delta N}$, on trouve que :

$$\vec{S_o}\vec{\Delta N} + \vec{R_o}\vec{\Delta N} = 2 \cos i_o\ \vec{N_o}\vec{\Delta N} \approx 0$$

En tenant compte de ces deux remarques, on arrive à l'expression finale du vecteur $\vec{R_{po}}$:

$$\vec{R_{po}} = \vec{R_o} + 2\ [\cos i_o\ \vec{\Delta N} - (\vec{R_o}\vec{\Delta N})\vec{N_o}] \qquad \text{(III-11)}$$

Il nous reste maintenant à déterminer les composantes de ce vecteur dans le repère Rri. Pour cela, il est avantageux de développer $\vec{R_o}$ en fonction du vecteur unitaire $\vec{R_i}$, qui dirige l'axe OiO' (fig.III-5). On a bien sûr :

$$\vec{OiO'} = \vec{OO'} - \vec{OOi} = D\vec{R_o} - \vec{OOi}$$

et

$$R_i = \frac{D\vec{R_o} - \vec{OOi}}{||D\vec{R_o} - \vec{OOi}||} = \frac{\vec{R_o} - \frac{\vec{OOi}}{D}}{||\vec{R_o} - \frac{\vec{OOi}}{D}||} \qquad \text{(III-12)}$$

où $\frac{\vec{OOi}}{D}$ n'est composé que d'infiniment petits du premier ordre. On peut alors développer $||\vec{R_o} - \frac{\vec{OOi}}{D}||$ en fonction de ce terme :

$$||\vec{R_o} - \frac{\vec{OOi}}{D}|| \approx 1 - \vec{R_o}\,\frac{\vec{OOi}}{D}$$

et en déduire que :

$$\vec{R_i} \approx \vec{R_o} - \frac{\vec{OOi}}{D} + \frac{(\vec{R_o}\,\vec{OOi})}{D}\,\vec{R_o} = \vec{R_o} + \vec{\Delta R} \qquad \text{(III-13)}$$

au premier ordre, avec $\vec{R_o}\,\vec{\Delta R} = 0$ (III-14)

En tirant $\vec{R_o}$ de la relation (III-13), et en le remplaçant dans

l'expression de $\overrightarrow{R_{po}}$ donnée par (III-11), on trouve que :

$$\overrightarrow{R_{po}} \approx \overrightarrow{R_i} + \frac{\overrightarrow{OOi}}{D} - \frac{(\overrightarrow{R_i}\ \overrightarrow{OOi})}{D}\overrightarrow{R_i} + 2\ [\cos i_o\ \overrightarrow{\Delta N} - (\overrightarrow{R_o}\ \overrightarrow{\Delta N})\ \overrightarrow{N_o}] \qquad \text{(III-15)}$$

Par ailleurs la relation (III-12) permet d'exprimer la distance D_i, qui est égale à la norme du vecteur $\overrightarrow{OiO'}$, en fonction de $\frac{\overrightarrow{OOi}}{D}$:

$$D_i = ||\overrightarrow{OiO'}|| \approx D\left[1 - \overrightarrow{R_o}\ \frac{\overrightarrow{OOi}}{D}\right] \qquad \text{(III-16)}$$

au premier ordre.

Nous cherchons maintenant les composantes du vecteur $\frac{\overrightarrow{OOi}}{D}$ dans le repère Ro; celles-ci s'écrivent :

$$\frac{\overrightarrow{OOi}}{D} = \begin{vmatrix} \frac{g(Y_{oi},Z_{oi})}{D} \\ \frac{Y_{oi}}{D} \\ \frac{Z_{oi}}{D} \end{vmatrix}$$

où $g(Y_{oi},Z_{oi})$ est la fonction caractéristique du support des modules de l'héliostat focalisant. Dans le cas de l'héliostat CETHEL III bis, l'expression de $g(Y_{oi},Z_{oi})$ est définie par la relation (II-11); un développement limité de celle-ci en Y et Z nous donne :

$$g(Y_{oi},Z_{oi}) \approx \frac{Y_{oi}^2+Z_{oi}^2}{4f_H}$$

$\frac{Y_{oi}^2}{Df_H}$ et $\frac{Z_{oi}^2}{Df_H}$ sont des termes du second ordre qui n'entrent pas dans le cadre de notre approximation; ils seront donc négligés et l'expression du vecteur $\frac{\overrightarrow{OOi}}{D}$ dans Ro est finalement :

$$\frac{\overrightarrow{OOi}}{D} \approx \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{Y_{oi}}{D} \\ \frac{Z_{oi}}{D} \end{vmatrix} \qquad \text{(III-17)}$$

Pour exprimer les composantes de $\overrightarrow{R_{po}}$ au premier ordre dans Rri, il est nécessaire de déterminer la matrice de passage de Rri à Ro, puisque $\overrightarrow{\Delta N}$ et $\overrightarrow{OOi}/D$ ne sont jusqu'ici connus que dans ce dernier repère. En introduisant le repère intermédiaire Rro lié au vecteur

cible $\vec{R_o}$, il est possible d'exprimer celle-ci sous la forme d'un produit de deux matrices de type P_2 (on se reportera aux définitions des repères Ro,Rro et Rri, dont les axes Y sont toujours contenus dans un plan horizontal :

$$P_{Rri-Ro} = P_{2\ Rri-Rro} \times P_{2\ Rro-Ro}$$

Les repères Rri et Rro étant voisins, et respectivement liés aux vecteurs $\vec{R_i}$ et $\vec{R_o}$, il est possible, en utilisant les relations (III-13) et (III-14), et l'expression générale d'une matrice de type P_2 donnée par (II-21), de mettre la matrice $P_{2\ Rri-Rro}$ sous la forme:

$$P_{2\ Rri-Rro} = I + \Delta P$$

où I est la matrice identité, et ΔP est une matrice dont la première diagonale n'est constituée que d'éléments nuls, et dont les autres éléments sont des termes du premier ordre.

Alors, les relations suivantes, qui donnent les composantes des vecteurs $\vec{\Delta N}$ et $\vec{OOi}/D$ exprimées dans le repère Rri, à partir de leurs composantes dans le repère Ro :

$$\vec{\Delta N}_{(Rri)} = (I+\Delta P) \times P_{2\ Rro-Ro}\ \vec{\Delta N}\ (Ro)$$

$$\frac{\vec{OOi}}{D}(Rri) = (I+\Delta P) \times P_{2\ Rro-Ro} \frac{\vec{OOi}}{D}\ (Ro)$$

peuvent respectivement être remplacées par leurs expressions approchées au premier ordre, reproduites ci-dessous :

$$\vec{\Delta N}_{(Rri)} = P_{2\ Rro-Ro}\ \vec{\Delta N}_{(Ro)} \qquad \text{(III-18)}$$

$$\frac{\vec{OOi}}{D}(Rri) = P_{2\ Rro-Ro}\ \frac{\vec{OOi}}{D}(Ro)$$

Le calcul approché des composantes de $\vec{R_{po}}$ dans le repère Rri ne nécessite finalement que la connaissance d'une seule matrice de passage, $P_{2\ Rro-Ro}$, commune à tous les modules réflecteurs d'un héliostat. Bien sûr, il était parfaitement envisageable d'utiliser les matrices de passage de Rri à Ro telles quelles, sans autrement chercher à les approximer. On aurait ainsi probablement gagné en précision, mais, en contrepartie, cela aurait eu pour conséquence d'alourdir les calculs numériques, ainsi que les expressions théoriques des courbes d'égale luminance qui seront données dans le paragraphe 5. Nous avons donc finalement préféré la simplicité et la

rapidité de calcul, en choisissant de n'utiliser que la matrice $P_{2\ Rro-Ro}$, dont nous noterons désormais les coefficients :

$$P_{2\ Rro-Ro} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{(III-19)}$$

Dans ces conditions, on donne les expressions des composantes des vecteurs $\overrightarrow{R_o}$, $\overrightarrow{N_o}$, $\overrightarrow{\Delta N}$, et $\frac{\overrightarrow{OOi}}{D}$ dans le repère Rri, qui sont toutes nécessaires au calcul de $\overrightarrow{R_{po}}$ par la relation (III-15) :

$$\overrightarrow{R_o} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{N_o} \approx \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\Delta N} \approx \begin{bmatrix} C_{12}(a_p+a_r - \frac{Y_{oi}}{2f_H} - f'_y) + C_{13}(h_p+h_r - \frac{Z_{oi}}{2f_H} - f'_z) \\ C_{22}(a_p+a_r - \frac{Y_{oi}}{2f_H} - f'_y) + C_{23}(h_p+h_r - \frac{Z_{oi}}{2f_H} - f'_z) \\ C_{32}(a_p+a_r - \frac{Y_{oi}}{2f_H} - f'_y) + C_{33}(h_p+h_r - \frac{Z_{oi}}{2f_H} - f'_z) \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \frac{\overrightarrow{OOi}}{D} \approx \frac{1}{D} \begin{bmatrix} C_{12}\ Y_{oi} + C_{13}\ Z_{oi} \\ C_{22}\ Y_{oi} + C_{23}\ Z_{oi} \\ C_{32}\ Y_{oi} + C_{33}\ Z_{oi} \end{bmatrix}$$

En remplaçant ces expressions dans la relation (III-15), et en tenant compte que :

$$C_{11}\ C_{22} - C_{12}\ C_{21} = C_{33}$$

$$C_{11}\ C_{23} - C_{13}\ C_{21} = -\ C_{32}$$

$$C_{11}\ C_{32} - C_{31}\ C_{12} = -\ C_{23}$$

$$C_{11}\ C_{33} - C_{13}\ C_{31} = C_{22}$$

puisque $P_{2\ Rro-Ro}$ est une matrice orthogonale droite (voir le paragraphe 5.1 du deuxième chapitre), on arrive enfin à l'expression des composantes du vecteur $\overrightarrow{R_{po}}$ dans Rri, développées au premier ordre dans le cas de l'héliostat focalisant sphérique :

$$\overrightarrow{R_{po}} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 2\,C_{33}(a_p+a_r-f'_y) - 2\,C_{32}(h_p+h_r-f'_z) \\ \qquad + (\frac{C_{22}}{D} - \frac{C_{33}}{f_H})\,Y_{oi} + (\frac{C_{23}}{D} + \frac{C_{32}}{f_H})Z_{oi} \\ -2\,C_{23}(a_p+a_r-f'_y) + 2\,C_{22}(h_p+h_r-f'_z) \\ \qquad + (\frac{C_{23}}{f_H} + \frac{C_{32}}{D})\,Y_{oi} + (\frac{C_{33}}{D} - \frac{C_{22}}{f_H})Z_{oi} \end{bmatrix} \quad \text{(III-20)}$$

Dans cette expression un peu complexe, il y a lieu de distinguer :

- Les termes en a_r, h_r, a_p et h_p, qui traduisent les effets des défauts spécifiques que sont les erreurs de réglage et de pointage.
- Les termes en f'_y et f'_z qui caractérisent le relief des modules réflecteurs
- Les termes en $\frac{Y_{oi}}{f_H}$ et $\frac{Z_{oi}}{f_H}$ qui résultent de la sphéricité de l'héliostat.
- Les termes en $\frac{Y_{oi}}{D}$ et $\frac{Z_{oi}}{D}$ qui sont caractéristiques de l'implantation du module considéré sur l'héliostat.

Ce sont les quatre derniers termes, qui, en se combinant, rendent compte de la dispersion des rayons réfléchis par l'héliostat au cours de la journée : il s'agit en fait d'un effet d'astigmatisme et de courbure de champ de l'héliostat sphérique.

4.2.2) Héliostat réglé en dehors de son axe

Ainsi qu'on l'a vu au chapitre précédent, ce cas est encore plus complexe que celui de l'héliostat sphérique. Toutefois, il ne nécessite la modification que d'un seul terme, qui est $\overrightarrow{\Delta N_{oi}}$. Par ailleurs la matrice de passage de Rso à Roi est là aussi de type P_1 (cf.paragraphe 5.2.5.2 du chapitre précédent). Bien qu'en pratique aucun des héliostats focalisants du champ de THEMIS ne soit réglé en dehors de son axe, nous allons donner quelques éléments en vue de la résolution de ce cas, sans aller jusqu'au bout des calculs, mais dans le but de prouver que l'approximation du premier ordre s'y adapte parfaitement.

Les seuls termes qui changent par rapport au paragraphe précédent sont donc les composantes de $\overrightarrow{\Delta N_{oi}}$. Afin de déterminer celles-ci, nous introduisons le vecteur soleil $\overrightarrow{S_{to}}$, le vecteur

unitaire normal à l'héliostat $\vec{N_{to}}$, et le vecteur cible $\vec{R_{to}}$, correspondant à la position du soleil pour laquelle l'héliostat est optimisé; $\vec{S_{to}}$, $\vec{N_{to}}$ et $\vec{R_{to}}$ sont bien évidemment liés par la loi de Descartes. A l'instant de réglage t_o, et seulement à cet instant, $\vec{R_{oi}}$, vecteur unitaire repérant la direction du rayon principal réfléchi au centre Oi du module considéré, est confondu avec $\vec{R_i}$. L'expression de $\vec{R_{oi}}$ peut donc être déduite de celle du vecteur $\vec{R_{po}}$ donnée par la relation (III-15) en remplaçant $\vec{\Delta N}$ par $\vec{\Delta N_{oi}}$, puisque le réglage hors-axe est indépendant du type des facettes réflectrices qui équipent l'héliostat, et que cette opération est censée s'effectuer en l'absence de dépointages; on peut alors écrire, au premier ordre :

$$\vec{R_{oi}} \approx \vec{R_{oi}} + \frac{\vec{OOi}}{D} - \frac{(\vec{R_{to}}\ \vec{OOi})}{D}\vec{R_{to}} + 2\ [\cos i_{to}\ \vec{\Delta N_{oi}} - (\vec{R_{to}}\ \vec{\Delta N_{oi}})\ \vec{N_{to}}]$$

où i_{to} est l'angle d'incidence des rayons solaires à l'instant de réglage initial t_o. On en déduit que :

$$2\ [\cos i_{to}\ \vec{\Delta N_{oi}} - (\vec{R_{to}}\ \vec{\Delta N_{oi}})\ \vec{N_{to}}] \approx \frac{(\vec{R_{to}}\ \vec{OOi})}{D}\vec{R_{to}} - \frac{\vec{OOi}}{D} \qquad \text{(III-21)}$$

et, en multipliant membre à membre les termes de cette équation par le vecteur $\vec{N_{to}}$, on arrive à la relation :

$$-2\ (\vec{R_{to}}\ \vec{\Delta N_{oi}}) \approx (\vec{R_{to}}\ \frac{\vec{OOi}}{D})\cos i_{to}$$

valable au premier ordre. Nous pouvons alors tirer l'expression de $\vec{\Delta N_{oi}}$ de la relation (III-21) :

$$\vec{\Delta N_{oi}} \approx \frac{1}{2\cos i_{to}}\left[\frac{(\vec{R_{to}}\ \vec{OOi})}{D}\frac{\vec{R_{to}} - \vec{S_{to}}}{2} - \frac{\vec{OOi}}{D}\right] \qquad \text{(III-22)}$$

Cette dernière relation nous permet de déterminer les composantes de $\vec{\Delta N_{oi}}$ dans Rso en fonction de la position du soleil choisie pour l'optimisation de l'héliostat, et des termes du premier ordre Y_{oi}/D et Z_{oi}/D. Il resterait ensuite à reprendre les calculs qui ont été menés au paragraphe précédent avec cette nouvelle expression de $\vec{\Delta N_{oi}}$; nous venons donc de montrer qu'il est possible, dans le cas d'un héliostat focalisant réglé en dehors de son axe, de déterminer précisément les composantes du vecteur $\vec{R_{po}}$ dans le repère Rri.

Par ailleurs, la relation (III-22) s'applique également à l'héliostat réglé sur son axe. Dans ce cas $\overrightarrow{S_{to}}$, $\overrightarrow{N_{to}}$ et $\overrightarrow{R_{to}}$ sont confondus et $i_{to}=0$. On retrouve alors :

$$\overrightarrow{\Delta N_{oi}} \approx -\frac{\overrightarrow{OOi}}{2D} \approx \begin{vmatrix} 0 \\ -\frac{Y_{oi}}{2D} \\ -\frac{Z_{oi}}{2D} \end{vmatrix}$$

où D est la focale idéale de l'héliostat sphérique réglé sur son axe.

4.3) Cas d'un héliostat plan

En toute rigueur, un héliostat plan peut être considéré comme un héliostat sphérique de courbure nulle, ou de focale f_H infinie. En principe cela revient à annuler le terme $\overrightarrow{\Delta N_{oi}}$ dans les relations (III-9). De plus, les héliostats plans sont toujours équipés de facettes planes à l'origine (ce qui n'exclut pas une déformation ultérieure de leur relief) : dans ce cas la fonction caractéristique du relief des facettes $f(Y_p,Z_p)$ reste constante et ses dérivées partielles f'_y et f'_z sont nulles. On peut donc également éliminer le terme $\overrightarrow{\Delta N_p}$ des relations (III-9), pour finalement écrire, dans le repère Ro (fig.III-6) :

$$\overrightarrow{\Delta N} = \overrightarrow{\Delta N_{op}} + \overrightarrow{\Delta N_{oir}} \approx \begin{vmatrix} 0 \\ a_p+a_r \\ h_p+h_r \end{vmatrix} \qquad \text{(III-23)}$$

A partir de là, le calcul des composantes du vecteur $\overrightarrow{R_{po}}$, exprimées au premier ordre dans le repère Rri, se fait exactement de la même manière que dans le cas d'un héliostat focalisant réglé sur son axe (paragraphe 4.2.1), y compris l'approximation des matrices P_{Rri-Ro} par la matrice P_{Rro-Ro}, que l'on notera de la même manière (relation (III-19)). A signaler simplement que cette matrice est cette fois-ci de type P_1, puisque le repère Rro lié au rayon principal réfléchi par l'héliostat est ici le repère Rinst lui-même (voir le paragraphe 5.3.1 du chapitre précédent). Dans ces conditions, on arrive à l'expression suivante des cosinus directeurs de $\overrightarrow{R_{po}}$ dans Rri, développés au premier ordre :

$$\overrightarrow{R_{po}} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 2C_{33}(a_p+a_r) - 2C_{32}(h_p+h_r) + C_{22}\frac{Y_{oi}}{D} + C_{23}\frac{Z_{oi}}{D} \\ -2C_{23}(a_p+a_r) + 2C_{22}(h_p+h_r) + C_{32}\frac{Y_{oi}}{D} + C_{33}\frac{Z_{oi}}{D} \end{bmatrix} \qquad \text{(III-24)}$$

où a_r, h_r, a_p et h_p sont les défauts de réglage et de pointage de l'héliostat plan, et Y_{oi}/D et Z_{oi}/D les termes de translation qui caractérisent, au premier ordre, le passage du repère Ro au repère Rri. Ces derniers pourront être éliminés par l'adoption d'un système de coordonnées unique pour toutes les facettes réflectrices, et rapporté au point origine O choisi sur l'héliostat, lorsque l'équation des courbes iso-luminance sera établie.

4.4) Cas d'un concentrateur fixe

Dans ce paragraphe, nous nous réfèrerons aux repères qui ont été définis au paragraphe 5.4.1 du deuxième chapitre. Le problème d'une facette réflectrice montée sur un concentrateur fixe est en même temps plus simple et plus complexe que celui d'un héliostat focalisant : plus simple, parce qu'ici le repère de travail Rri est directement lié aux rayons réfléchis par la facette, et plus complexe, parce qu'il faut éventuellement introduire les défauts de pointage en azimut et en hauteur a_p et h_p de l'héliostat qui éclaire la facette : dans cette perspective, le vecteur soleil effectif $\vec{S}$ peut être défini, pour la facette considérée, par :

$$\vec{S} = \vec{S_o} + \vec{\Delta S} \qquad \text{(III-25)}$$

où $\vec{S_o}$ et $\vec{\Delta S}$ ont respectivement pour composantes dans Rinst (1,0,0) et (0, a_p, h_p) (fig.III-7); il s'agit évidemment d'expressions développées au premier ordre.

D'autre part, le vecteur $\overrightarrow{N_{soi}}$, qui dirige l'axe principal du repère Rsoi, lié à la facette après introduction de ses défauts de réglage, s'exprime, au premier ordre dans le repère Roi :

$$\overrightarrow{N_{soi}} = \overrightarrow{N_{oi}} + \overrightarrow{\Delta N_{oir}}$$

où $\overrightarrow{\Delta N_{oir}}$ a pour composantes (0, a_r, h_r), a_r et h_r étant les erreurs de réglage en azimut et en hauteur de la facette réflectrice considérée.

Le relief de la facette est ensuite introduit dans Rsoi de la

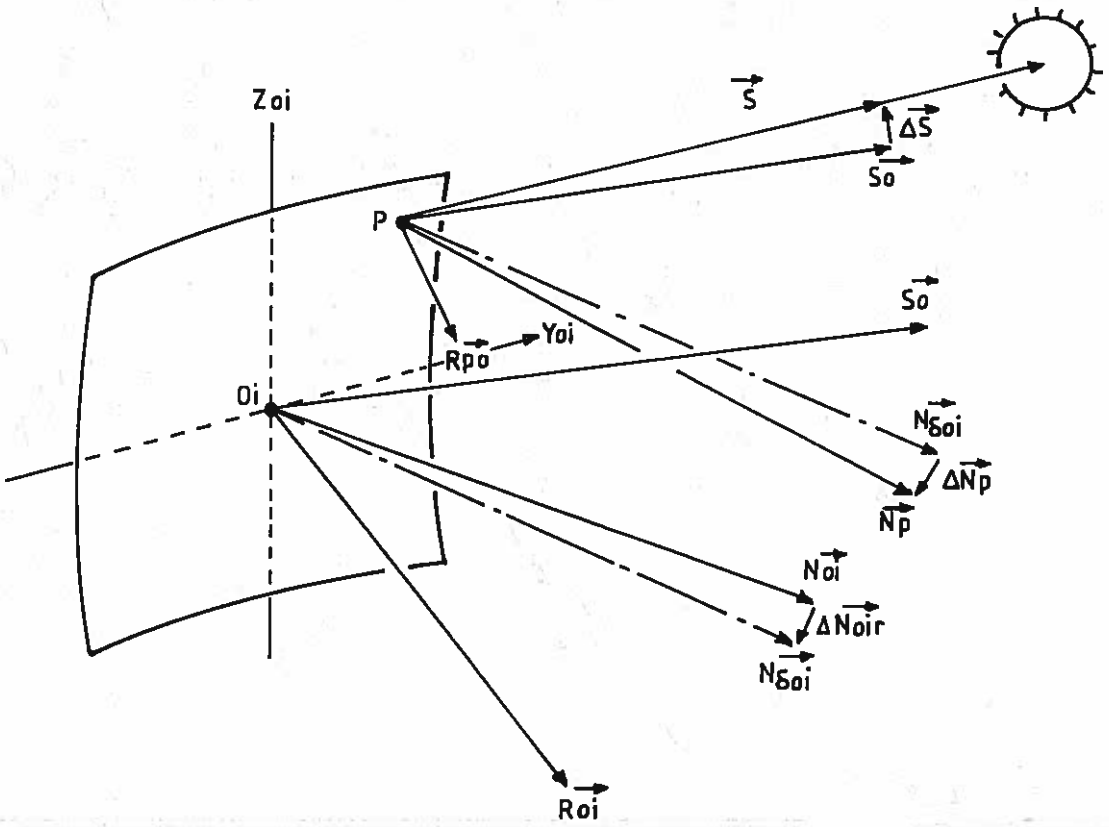


fig III-7 : Calcul de $\overrightarrow{N_p}$ dans Roi dans le cas d'une facette de concentrateur fixe.

même manière que dans le cas de l'héliostat focalisant, et l'on peut finalement écrire, dans le repère Roi :

$$\overrightarrow{N_p} = \overrightarrow{N_{oi}} + \overrightarrow{\Delta N}$$

$$\overrightarrow{\Delta N} = \overrightarrow{\Delta N_{oir}} + \overrightarrow{\Delta N_p} = \begin{cases} 0 \\ a_r - f'_y \\ h_r - f'_z \end{cases} \qquad \text{(III-26)}$$

Alors, en introduisant les relations (III-25) et (III-26) dans l'expression vectorielle de la loi de Descartes (II-5), et en se limitant aux termes du premier ordre, on obtient :

$$\overrightarrow{R_{po}} \approx \overrightarrow{R_{oi}} + 2(\overrightarrow{N_{oi}}\ \overrightarrow{\Delta S})\ \overrightarrow{N_{oi}} - \overrightarrow{\Delta S} + 2\ [\cos i_o\ \overrightarrow{\Delta N} - (\overrightarrow{R_{oi}}\ \overrightarrow{\Delta N})\ \overrightarrow{N_{oi}}] \qquad \text{(III-27)}$$

Dans le cas du concentrateur fixe $\overrightarrow{R_{oi}} = \overrightarrow{R_i}$. Les composantes du

dernier terme de la relation (III-27) se calculent donc facilement dans Rri à l'aide de la matrice $P_{2\ Rri-Roi}$, dont on notera les coefficients de la même façon que dans les paragraphes qui précèdent :

$$P_{2\ Rri-Roi} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \qquad \text{(III-28)}$$

Par contre, l'expression dans Rri des composantes du terme $2(\overrightarrow{N_{oi}}\ \overrightarrow{\Delta S})\ \overrightarrow{N_{oi}} - \overrightarrow{\Delta S}$, qui caractérise le dépointage de l'héliostat plan, n'est obtenue qu'au terme d'un calcul long et compliqué, que nous ne reproduirons pas ici; nous ne donnons que l'expression finale des cosinus directeurs du vecteur $\overrightarrow{R_{po}}$ dans Rri, développés au premier ordre :

$$\overrightarrow{R_{po}} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 2C_{33}(a_r - f'_y) - 2C_{32}(h_r - f'_z) - \left[\frac{C_{22}\ a_p - C_{32}\ h_p)}{\sqrt{C_{22}^2 + C_{32}^2}}\right] \\ -2C_{23}(a_r - f'_y) + 2C_{22}(h_r - f'_z) - \left[\frac{C_{32}\ a_p + C_{22}\ h_p)}{\sqrt{C_{22}^2 + C_{32}^2}}\right] \end{bmatrix} \qquad \text{(III-29)}$$

où les termes entre crochets sont caractéristiques du défaut de pointage de l'héliostat plan. On constate que pour un même héliostat éclairant un ensemble de facettes du concentrateur, les effets du dépointage différent d'une facette à l'autre, puisque les coefficients C_{22} et C_{32} sont étroitement liés à l'implantation des facettes réflectrices. Pour la suite, nous ne tiendrons plus compte de l'effet de ces dépointages, qui présentent d'ailleurs des fluctuations très rapides dans le cas d'un héliostat plan asservi en boucle fermée.

5) ALLURE DES COURBES ISO-LUMINANCE EN FONCTION DU TYPE DES FACETTES

Connaissant maintenant les expression des vecteurs $\overrightarrow{PM'}/||PM'||$ et $\overrightarrow{R_{po}}$ dans le repère Rri pour les trois types de structure qui nous intéressent (héliostats focalisants, héliostats plans et concentrateurs fixes), l'expression approchée de l'angle ϵ que font entre eux ces deux vecteurs s'obtiendra par développement

de la relation suivante :

$$\epsilon^2 \approx \sin^2\epsilon = \left|\left|\overrightarrow{R_{po}} \wedge \frac{\overrightarrow{PM'}}{||PM'||}\right|\right|^2 \qquad \text{(III-30)}$$

Cette relation nous donne également, pour un angle ϵ donné tel que $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_o$, l'équation des courbes d'égale luminance observées du point M' sur la ou les facettes réflectrices considérées. C'est donc l'allure de ces courbes iso-luminance que nous allons examiner ici, en fonction du type et des défauts de la structure étudiée, et en introduisant maintenant le relief des facettes réflectrices choisies pour l'équiper.

5.1) Cas général : facettes toroidales

Avant d'établir l'équation des courbes iso-luminance observables sur une telle facette, nous revenons sur l'expression générale des vecteurs $\overrightarrow{PM'}/||PM'||$ et $\overrightarrow{R_{po}}$; nous rappelons en effet que

$$\frac{\overrightarrow{PM'}}{||PM'||} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{V'-V_p}{D_i} \\ \frac{W'-W_p}{Di} \end{bmatrix} \qquad \text{(III-7)}$$

où D_i est en principe la distance $||\overrightarrow{OiO'}||$. Toutefois, dans le cas d'un héliostat focalisant ou d'un héliostat plan, la relation (III-16) nous autorise à remplacer, au premier ordre , D_i par D dans l'expression de $\frac{\overrightarrow{PM'}}{||PM'||}$, D étant la distance qui sépare le point origine O du repère lié à l'héliostat et le point O'. Nous noterons donc désormais :

$$\frac{\overrightarrow{PM'}}{||PM'||} \approx \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{V'-V_p}{D} \\ \frac{W'-W_p}{D} \end{bmatrix} \qquad \text{(III-31)}$$

avec $D=||\overrightarrow{OO'}||$ dans le cas des héliostats,

et $D=||\overrightarrow{OiO'}||$ dans le cas de facettes réflectrices montées sur un concentrateur fixe.

Par ailleurs, on peut écrire les composantes de $\overrightarrow{R_{po}}$ sous la forme :

$$\overrightarrow{R_{po}} \approx \begin{vmatrix} 1 \\ -2C_{33}f'_y + 2C_{32}f'_z - \frac{V_o}{D} \\ 2C_{23}f'_y - 2C_{22}f'_z - \frac{W_o}{D} \end{vmatrix} \qquad \text{(III-32)}$$

avec

$$\begin{vmatrix} V_o = -2DC_{33}(a_p+a_r)+2DC_{32}(h_p+h_r)-(C_{22}-C_{33}\frac{D}{f_H})Y_{oi}-(C_{23}+C_{32}\frac{D}{f_H})Z_{oi} \\ W_o = 2DC_{23}(a_p+a_r)-2DC_{22}(h_p+h_r)-(C_{32}+C_{23}\frac{D}{f_H})Y_{oi}-(C_{33}-C_{22}\frac{D}{f_H})Z_{oi} \end{vmatrix} \qquad \text{(III-33)}$$

dans le cas d'un héliostat focalisant sphérique,

$$\begin{vmatrix} V_o = -2DC_{33}(a_p+a_r)+2DC_{32}(h_p+h_r)-C_{22}Y_{oi}-C_{23}Z_{oi} \\ W_o = 2DC_{23}(a_p+a_r)-2DC_{22}(h_p+h_r)-C_{32}Y_{oi}-C_{33}Z_{oi} \end{vmatrix} \qquad \text{(III-34)}$$

dans le cas d'un héliostat plan, et

$$\begin{vmatrix} V_o = -2DC_{33}\,a_r + 2DC_{32}\,h_r \\ W_o = 2DC_{23}\,a_r - 2DC_{22}\,h_r \end{vmatrix} \qquad \text{(III-35)}$$

dans le cas d'un concentrateur fixe. Le choix des paramètres D, V_o et W_o suffit donc à caractériser le type de structure étudié, ainsi que ses défauts spécifiques.

En remplaçant les relations (III-31) et (III-32) dans (III-30), on peut alors établir l'équation la plus générale des courbes iso-luminance, donnée par :

$$D^2\epsilon^2 = (V_p - 2DC_{33}f'_y + 2DC_{32}f'_z - (V'+V_o))^2 + (W_p + 2DC_{23}f'_y - 2DC_{22}f'_z - (W'+W_o))^2 \qquad \text{(III-36)}$$

Nous introduisons maintenant le relief d'une facette toroïdale, dont on suppose qu'elle présente ses deux rayons de courbure principaux R_y et R_z suivant les directions OiYoi et OiZoi. L'équation caractéristique de cette surface est, au deuxième ordre :

$$X_p = f(Y_p,Z_p) \approx \frac{Y_p^2}{2R_y} + \frac{Z_p^2}{2R_z} \qquad \text{(III-37)}$$

avec $f'_y \approx \frac{Y_p}{R_y}$ et $f'_z \approx \frac{Z_p}{R_z}$

Par ailleurs, le système de relations (III-8) qui permet le passage des coordonnées (Y_p, Z_p) du point P aux coordonnées (V_p, W_p) du point H, projection de P sur le plan de visée, peut être réécrit, au premier ordre :

$$\begin{cases} V_p = C_{22}\, Y_p + C_{23}\, Z_p \\ W_p = C_{32}\, Y_p + C_{33}\, Z_p \end{cases} \qquad \text{(III-38)}$$

Ces relations approchées restent valables pour une position de M' différente du point O', puisque dans tous les cas les repères Rri, Rro et Rv sont confondus, ou, au pire, infiniment voisins (fig.III-8). Cela dit, un tel système n'est inversible que si son déterminant Δ est non nul. Les propriétés particulières des matrices de coefficients (C_{ij}) nous permettent d'écrire, d'après le paragraphe 5.1 du chapitre II :

$$\Delta = C_{22}\, C_{33} - C_{23}\, C_{32} = C_{11} = \cos i_o \neq 0$$

Ceci revient à supposer que l'angle d'incidence moyen i_o des rayons solaires sur la facette (ou l'héliostat) considérée est différent de 90° : en pratique cela est toujours réalisé lors du fonctionnement normal des deux installations que nous étudions ici. L'inversion du système (III-38) conduit alors aux relations :

$$\begin{cases} Y_p = \dfrac{C_{33}\, V_p - C_{23}\, W_p}{\cos i_o} \\ Z_p = \dfrac{-C_{32}\, V_p + C_{22}\, W_p}{\cos i_o} \end{cases} \qquad \text{(III-39)}$$

En reportant ces expressions de Y_p et Z_p dans les relations (III-37), puis (III-36), on arrive finalement à l'équation des courbes iso-luminance observables sur une facette réflectrice toroïdale :

$$D^2\epsilon^2 = [AV_p + CW_p - (V'+V_o)]^2 + [BW_p + CV_p - (W'+W_o)]^2 \qquad \text{(III-40)}$$

$$\text{où } A = 1 - \frac{2D}{\cos i_o}\left[\frac{C_{33}^2}{R_y} + \frac{C_{32}^2}{R_z}\right]$$

$$\text{où } B = 1 - \frac{2D}{\cos i_o}\left[\frac{C_{23}^2}{R_y} + \frac{C_{22}^2}{R_z}\right] \qquad \text{(III-41)}$$

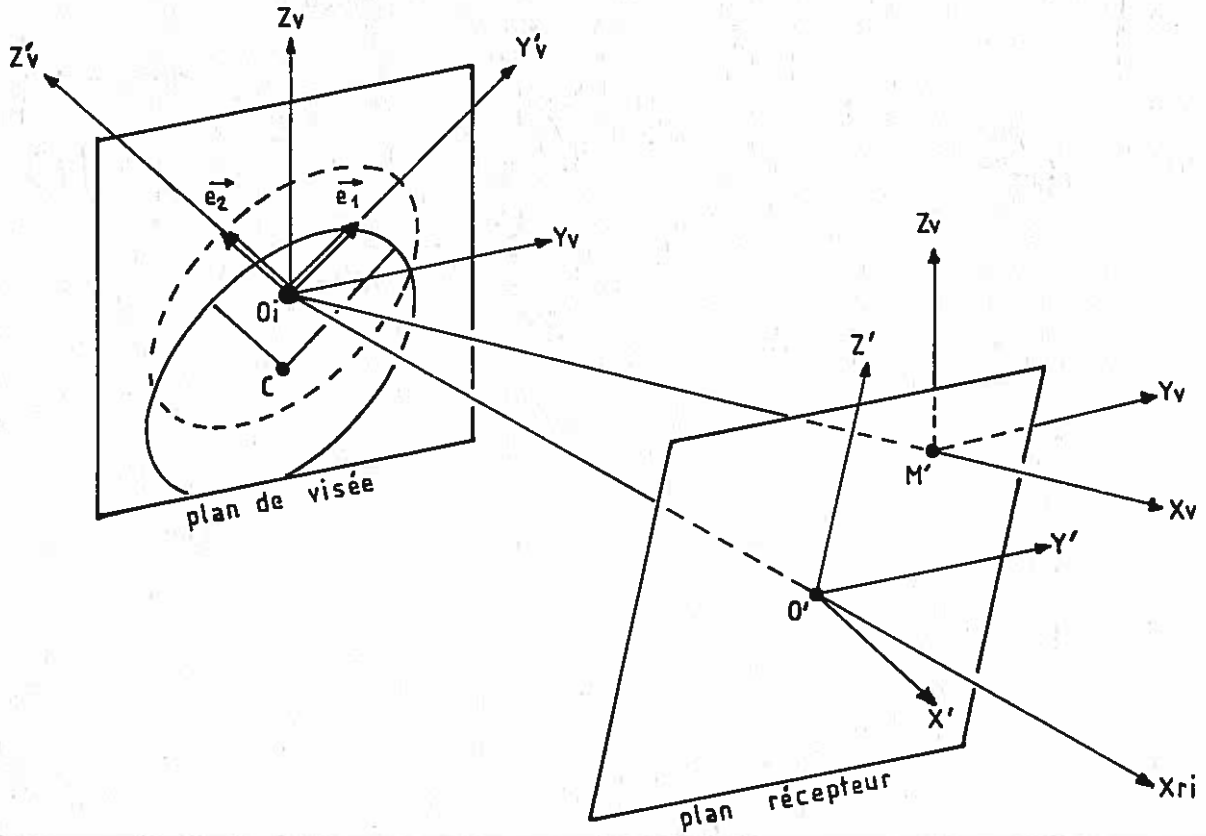


fig III-8 : Courbes iso-luminance apparentes dans le plan de visée. Le plus souvent, C ne sera pas confondu avec Oi.

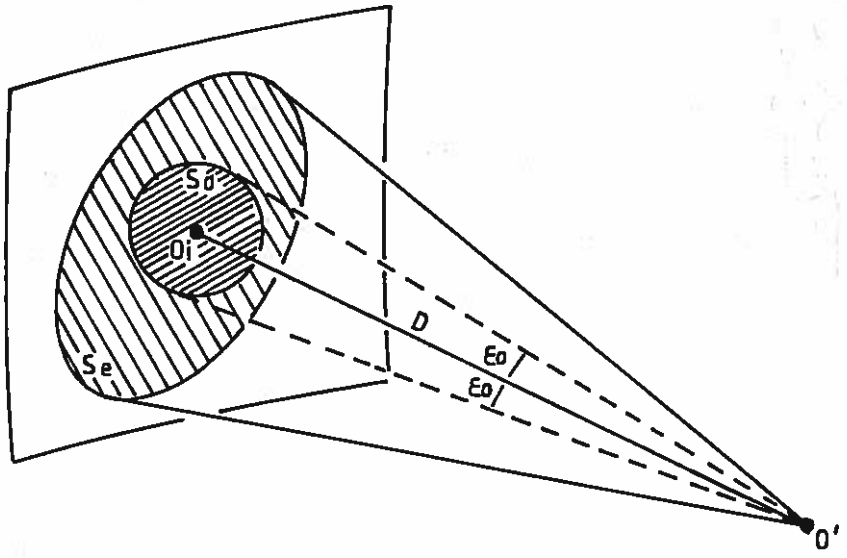


fig III-9 : Définition du facteur de concentration intrinsèque C_I d'une facette réflectrice.

et $C = \frac{2D}{\cos i_o}\left[\frac{C_{33}C_{23}}{R_y} + \frac{C_{22}C_{32}}{R_z}\right]$

Les courbes iso-luminance cherchées sont, à l'évidence, des coniques. Mais nous désirons déterminer précisément tous leurs paramètres. Pour cela on peut remarquer que l'expression de $D^2\epsilon^2$ donnée dans (III-40) est une forme quadratrique en V_p et W_p dont la matrice Q a pour éléments :

$$Q = \begin{bmatrix} A^2 + C^2 & (A+B)C \\ (A+B)C & B^2 + C^2 \end{bmatrix} \qquad \text{(III-42)}$$

Or, Q est le carré d'une matrice q qui s'exprime simplement :

$$q = \begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix} \qquad \text{(III-43)}$$

Il serait bien sûr intéressant de diagonaliser cette dernière matrice; or celle-ci est symétrique réelle : on sait alors qu'il est toujours possible de trouver une base orthonormée de vecteurs propres $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$, dont les valeurs propres associées sont respectivement λ_1 et λ_2. On note :

$$\vec{e_1} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{e_2} = \begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \end{bmatrix} \qquad \text{(III-44)}$$

avec $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Si V'_p et W'_p sont les coordonnées du point H exprimées dans un repère $OiY'_vZ'_v$ lié à $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ (fig.III-8), les relations de passage de (V'_p, W'_p) à (V_p, W_p) s'écrivent alors :

$$\begin{cases} V_p = \alpha V'_p - \beta W'_p \\ W_p = \beta V'_p + \alpha W'_p \end{cases} \qquad \text{(III-45)}$$

Comme d'autre part on sait que :

$(AV_p+CW_p)^2 + (BW_p+CV_p)^2 = \lambda_1^2 V_p'^2 + \lambda_2^2 W_p'^2$

et que

$$\begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} A & C \\ C & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \end{bmatrix} = \lambda_2 \begin{bmatrix} -\beta \\ \alpha \end{bmatrix}$$

puisque $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ sont les vecteurs propres de la matrice q, on peut déterminer l'équation des courbes iso-luminance dans le nouveau repère lié à $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$

en utilisant les relations précédentes pour développer, puis factoriser l'expression de $D^2\epsilon^2$ donnée par (III-40) :

$$D^2\epsilon^2 = [\lambda_1 V'_p - \alpha(V'+V_o) - \beta(W'+W_o)]^2 + [\lambda_2 W'_p + \beta(V'+V_o) - \alpha(W'+W_o)]^2 \quad \text{(III-46)}$$

C'est là l'équation d'une ellipse que l'on met sous la forme :

$$1 = \frac{[V'_p - V'_C]^2}{(D\epsilon/\lambda_1)^2} + \frac{[W'_p - W'_C]^2}{(D\epsilon/\lambda_2)^2} \quad \text{(III-47)}$$

Pour un angle ϵ donné (par exemple ϵ_o, qui est le rayon angulaire du soleil), la courbe iso-luminance est donc une ellipse (fig.III-8) dont les axes, qui valent respectivement $\frac{2D\epsilon_o}{\lambda_1}$ et $\frac{2D\epsilon_o}{\lambda_2}$, sont dirigés par les vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$, et dont les coordonnées du centre C sont données par la relation vectorielle :

$$\overrightarrow{OiC} = V'_C \vec{e_1} + W'_C \vec{e_2}$$

$$\text{avec } V'_C = \frac{\alpha(V'+V_o) + \beta(W'+W_o)}{\lambda_1} \quad \text{(III-48)}$$

$$W'_C = \frac{-\beta(V'+V_o) + \alpha(W'+W_o)}{\lambda_2}$$

Ces résultats sont importants; ils nous permettent en effet de tirer trois enseignements fondamentaux :

1) Dans le cadre d'une approximation du premier ordre, les courbes iso-luminance observables d'un point M' sur les facettes réflectrices d'une installation sont, le plus souvent (sauf cas de dégénérescence où l'une au moins des valeurs propres λ_1 et λ_2 est nulle), des ellipses dont l'orientation et les dimensions dépendent du type de facette étudié, et de la disposition géométrique de l'ensemble soleil-facette-point cible.

2) Par contre, une translation du point d'observation M' (qui se traduit par une modification des coordonnées V' et W') au voisinage du point cible aura pour seul effet de décaler les courbes iso-luminance dans le plan de visée, sans faire apparaître aucune déformation de celles-ci. Dans le repère $OiY'_VZ'_V$, ce décalage est caractérisé par une translation de vecteur :

$$\overrightarrow{T_{M'}} = \begin{vmatrix} \frac{\alpha V' + \beta W'}{\lambda_1} \\ -\frac{\beta V' + \alpha W'}{\lambda_2} \end{vmatrix}$$

3) Il en est de même de tous les termes qui interviennent

dans V_o et W_o, et qui sont donnés par les relations (III-33) à (III-35), pour les trois types de structure envisagés. Ainsi les dépointages des héliostats, les termes qui rendent compte de leur éventuelle sphéricité et des effets de l'astigmatisme, et les défauts de réglage des facettes réflectrices n'ont tous qu'une seule et même conséquence, qui est de faire subir une translation aux répartitions de luminance observées sur la surface réflectrice. A titre d'exemple, nous donnons l'expression du vecteur $\overrightarrow{T_r}$ qui caractérise, dans le repère $OiY'_vZ'_v$, la translation introduite par les seuls défauts de réglage. Cette expression s'applique aussi bien aux héliostats qu'aux concentrateurs fixes :

$$\overrightarrow{T_r} = \begin{bmatrix} \frac{2D}{\lambda_1}\left[(\beta C_{23} - \alpha C_{33})a_r + (\alpha C_{32} - \beta C_{22})h_r\right] \\ \\ \frac{2D}{\lambda_2}\left[(\beta C_{33} + \alpha C_{23})a_r - (\beta C_{32} + \alpha C_{22})h_r\right] \end{bmatrix} \qquad \text{(III-49)}$$

Dès lors, le principe de nos mesures est acquis : si, en général, les erreurs de réglage n'introduisent que des translations des distributions de luminance, il nous suffira de mesurer ces dernières sur chaque facette réflectrice, pour remonter ensuite à ses erreurs de réglage par des relations linéaires du type de (III-49).

Nous examinerons plus en détail l'application de ce principe d'évaluation aux héliostats plans du four de 1000 kW d'Odeillo et aux héliostats focalisants de la centrale THEMIS dans les paragraphes 5.2.3 et 5.3.3. Il nous reste à présent à formuler une autre remarque, et à revenir sur le cas des facettes toroïdales.

L'équation (III-47) nous permet en effet de déterminer le facteur de concentration intrinsèque C_I lié au relief de la facette réflectrice. Nous définissons celui-ci comme le rapport entre la surface apparente de l'image du soleil, telle qu'elle apparaîtrait à travers une facette réflectrice de dimensions infinies, et la surface apparente du disque solaire lui-même, tel qu'on pourrait l'observer du point M' si la facette était plane (fig.III-9). C_I est bien sûr différent de C(M'), d'abord parce qu'il n'y est pas tenu compte de la loi de luminance solaire $L(\epsilon)$, mais surtout parce que les miroirs ont évidemment une surface limitée; en conséquence C(M') n'atteindra jamais des valeurs infinies, alors que cela est possible pour C_I. Quoi qu'il en soit, la surface de l'ellipse image du soleil à travers la surface réflectrice vaut :

$$Se = \frac{\pi D^2 \epsilon_o^2}{\lambda_1 \lambda_2}$$

alors que la surface apparente du soleil sur une facette plane située à distance D est égale à $So = \pi D^2 \epsilon_o^2$

On en déduit donc que :

$$C_I = \frac{Se}{So} = \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \qquad \text{(III-50)}$$

Nous montrerons dans le chapitre IV que C_I peut être rapproché du facteur de concentration défini par Lipps [62] dans la formulation de sa vue en trou d'épingle (voir le paragraphe 4.4.3.1 du chapitre I). Par ailleurs, il est toujours possible d'écrire que $C(M') = R\, C_I$ dans le cas d'un soleil à luminance uniforme, et lorsqu'on est sûr que les répartitions de luminance vues de M' ne débordent pas sur les contours apparents du miroir.

Cette définition de C_I nous amène à nous interroger sur ce qu'il advient lorsque l'une des deux valeurs propres λ_1 ou λ_2 s'annule. Dans ce cas C_I devient infini, mais l'équation des courbes iso-luminance donnée par la relation (III-46) reste valable; plusieurs cas de dégénérescence sont ainsi possibles, et nous aurons l'occasion de les étudier plus loin.

Enfin, nous avons appliqué notre procédure de calcul, consistant à déterminer successivement les coefficients A, B et C de la matrice q, ainsi que ses valeurs propres, puis ses vecteurs propres, au cas des facettes toroïdales, en vue d'établir l'équation de leurs courbes iso-luminance. Toutefois, l'apparition d'un radical irréductible dans l'équation aux valeurs propres de la matrice q ne nous a pas permis d'arriver à un résultat simple. Comme d'autre part l'étude de ces facettes est assez anecdotique, puisqu'on n'en trouve ni à Odeillo, ni à THEMIS, nous avons renoncé à donner ici l'expression exacte de λ_1 et λ_2. Quoi qu'il en soit, tous les éléments nécessaires à la mise en oeuvre d'une solution numérique pour ce type de facettes ont été donnés plus haut. Nous allons à présent examiner les cas des facettes planes, cylindriques, et sphériques, en gardant toujours la même démarche.

5.2) Facettes planes

5.2.1) Cas idéal

Nous considérons d'abord le cas le plus simple où $V_o = W_o = 0$. Cela revient par exemple à supposer que la facette réflectrice plane est montée sur un concentrateur fixe, et que son orientation est parfaite. En fait nous nous intéressons seulement ici aux caractéristiques géométriques des courbes iso-luminance observées à travers la facette réflectrice étudiée, en fonction de son relief, et nous introduirons par la suite les termes de translation spécifiques aux types et aux défauts des structures considérées.

Dans le cas des facettes planes, on a bien sûr $f'_y = f'_z = 0$. Il est possible de se servir des expressions de A, B et C données au paragraphe précédent (relations (III-41)) pour une facette toroïdale, en faisant tendre R_y et R_z vers l'infini. On obtient alors :

$$A = B = 1 \quad \text{et} \quad C = 0$$

Dans ces conditions, il est inutile de chercher à diagonaliser la matrice q : l'équation des courbes iso-luminance se déduit directement de l'expression de $D^2\epsilon^2$ donnée par la relation (III-40), et on trouve :

$$D^2\epsilon^2 = (V_p - V')^2 + (W_p - W')^2$$

Les courbes iso-luminance sont donc, aux termes de translation liés à la position du point M' près, des cercles de rayon $D\epsilon$. En particulier, l'image du disque solaire à travers la facette plane a pour rayon $D\epsilon_o$. A priori, il n'était pas nécessaire de développer tout un système de relations approchées pour retrouver ce résultat évident. Mais nous allons à présent considérer que cette facette réflectrice est montée sur un héliostat plan.

5.2.2) Cas d'une facette d'héliostat plan présentant un défaut de réglage

Nous choisissons maintenant les expressions de V_o et W_o données par les relations (III-34), et qui prennent en compte les défauts de réglage des facettes réflectrices et le dépointage de l'héliostat plan, ainsi que les termes de translation en Y_{oi} et Z_{oi} liés à la position du centre de la facette considérée sur la surface de l'héliostat. Alors l'équation des courbes iso-luminance apparentes devient :

$$D^2\epsilon^2 = [V_p + 2DC_{33}(a_p+a_r) - 2DC_{32}(h_p+h_r) + C_{22}Y_{oi} + C_{23}Z_{oi}]^2$$
$$+ [W_p - 2DC_{23}(a_p+a_r) + 2DC_{22}(h_p+h_r) + C_{32}Y_{oi} + C_{33}Z_{oi}]^2 \quad \text{(III-51)}$$

Il convient maintenant de se reporter aux définitions des repères choisis au paragraphe 5.3.1 du chapitre précédent : dans le cas de l'héliostat plan en effet, les termes V' et W' n'apparaissent plus dans la relation (III-51), puisque le point d'observation M'_o est toujours pris comme origine du plan récepteur, et qu'il est situé dans le prolongement de l'axe du faisceau idéalement réfléchi par l'héliostat. Par ailleurs, c'est le point O qui est visé par le système d'observation placé en M'_o, et il est alors plus commode d'utiliser des coordonnées se rapportant directement à ce point. C'est ainsi que les coordonnées Y_{po} et Z_{po} d'un point P appartenant à une facette réflectrice de centre Oi s'expriment, dans le repère Ro (cf.fig.II-33) :

$$\begin{cases} Y_{po} = Y_{oi} + Y_p \\ Z_{po} = Z_{oi} + Z_p \end{cases} \qquad \text{(III-52)}$$

et que les coordonnées (V_{po}, W_{po}) de la projection du point P sur le plan de visée OYinstZinst s'obtiennent par les relations (III-38) appliquées à Y_{po} et Z_{po} :

$$\begin{cases} V_{po} = C_{22}\, Y_{po} + C_{23}\, Z_{po} \\ W_{po} = C_{32}\, Y_{po} + C_{33}\, Z_{po} \end{cases} \qquad \text{(III-53)}$$

En utilisant les relations (III-52) et (III-53), ainsi que les relations (III-38), on arrive à l'équation des courbes iso-luminance observables du point M'_o, en fonction des coordonnées apparentes V_{po} et W_{po} d'un point P, rapportées au point origine O de l'héliostat :

$$D^2\epsilon^2 = (V_{po}-V_c)^2 + (W_{po}-W_c)^2 \qquad \text{(III-54)}$$

où V_c et W_c sont les coordonnées apparentes du centre du disque solaire vu à travers la facette considérée, et rapportées au point O :

$$\begin{cases} V_c = -\,2DC_{33}(a_p+a_r) + 2DC_{32}(h_p+h_r) \\ W_c = \;\;2DC_{23}(a_p+a_r) - 2DC_{22}(h_p+h_r) \end{cases} \qquad \text{(III-55)}$$

Il nous faut maintenant préciser comment s'effectue le choix du point origine O sur la surface de l'héliostat.

5.2.3) Méthode d'estimation de l'erreur de réglage

On commence à se douter que les répartitions de luminance observables sur un ensemble de facettes réflectrices planes se présenteront comme des sections juxtaposées du disque solaire, et decalées les unes par rapport aux autres par l'effet de leurs erreurs de réglage (fig.III-10). La mesure de V_c et W_c sur les distributions de luminance expérimentales doit donc nous permettre, pour une facette donnée, de remonter aux termes (a_p+a_r) et (h_p+h_r), par inversion des relations (III-55). Or, les défauts de pointage en azimut et en hauteur de l'héliostat plan a_p et h_p, qui sont communs au groupe de facettes considéré, ne nous intéressent pas. Pour les éliminer, nous avions le choix entre deux méthodes.

La première méthode consiste à fixer le point origine O sur un point caractéristique de l'héliostat (centre d'une facette particulière, ou croisement de quatre facettes, etc...). Des coordonnées apparentes V_{ci} et W_{ci} du centre Ci de l'image du disque solaire observée sur la $i^{ème}$ facette réflectrice, nous déduisons alors ses erreurs cumulées (a_p+a_{ri}) et (h_p+h_{ri}). a_p et h_p sont ensuite éliminées par soustraction des moyennes arithmétiques des valeurs de (a_p+a_{ri}) et (h_p+h_{ri}) obtenues pour l'ensemble du groupe de facettes étudié. Mais cette méthode a pour conséquence de rendre les valeurs moyennes des erreurs de réglage nulles, ce qui peut ne pas être le cas en réalité.

La deuxième méthode consiste à placer le point O au centre énergétique des répartitions de luminance réellement observées à travers l'héliostat, par des critères graphiques. Dans ces conditions l'axe OM'_o est dirigé suivant le faisceau effectivement réfléchi par l'héliostat : cela revient à éliminer les défauts de pointage des relations (III-55), puisque ceux-ci ne contribuent qu'à décaler la position du centre énergétique sur la surface de l'héliostat. L'axe OM'_o ne repère plus alors exactement la direction idéale des rayons réfléchis, qui est parallèle à l'axe du concentrateur, mais en reste infiniment voisin, ce qui nous permet de ne rien changer à la matrice $P_{l\ Rinst-Ro}$, et à ses coefficients (C_{ij}).

C'est cette deuxième méthode que nous avons finalement choisie. Alors, si V_{ci} et W_{ci} sont les coordonnées apparentes du centre Ci du disque solaire dont les contours sont observés sur la $i^{ème}$ facette, les relations (III-55) se réduisent à :

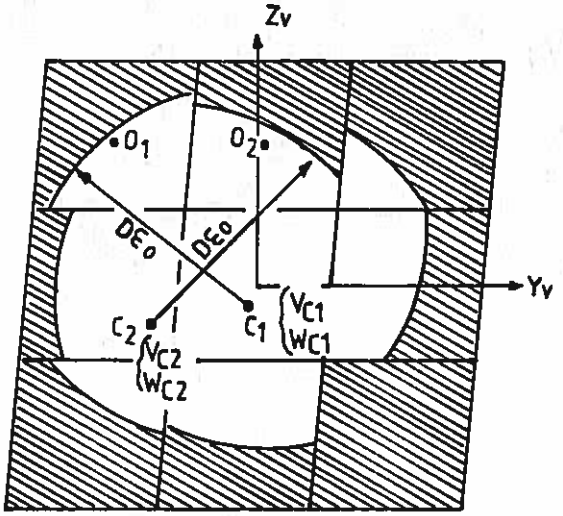


fig III-10 : Images du soleil vues à travers un groupe de facettes planes présentant des défauts de réglage. Les zones hachurées correspondent à des zones obscures.

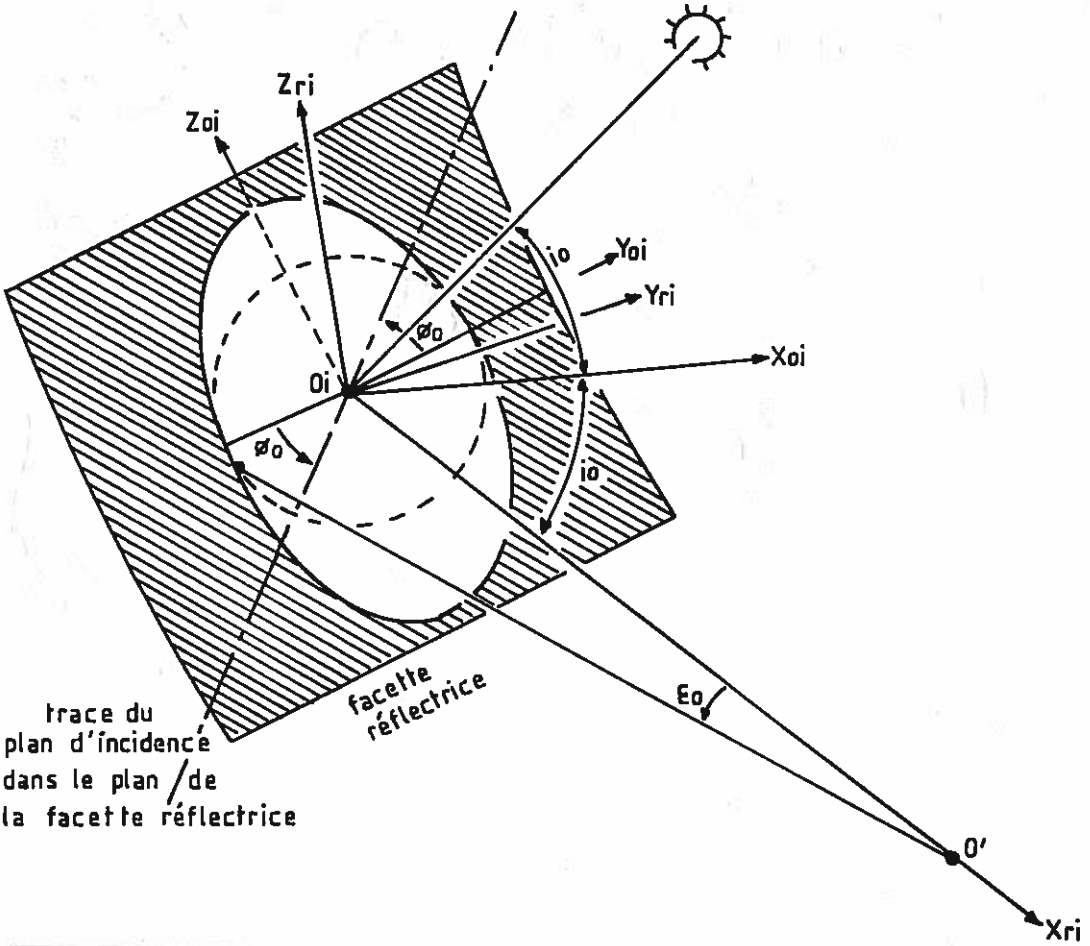


fig III-11 : Image du soleil vue à travers une facette cylindrique.

$$\begin{cases} V_{ci} = -\ 2D\ (C_{33}\ a_{ri} - C_{32}\ h_{ri}) \\ W_{ci} = 2D\ (C_{23}\ a_{ri} - C_{22}\ h_{ri}) \end{cases}$$

et l'on en déduit les relations linéaires qui nous donnent enfin, au premier ordre, les expressions de a_{ri} et h_{ri} :

$$a_{ri} = -\ \frac{C_{22}\ V_{ci} + C_{32}\ W_{ci}}{2D \cos i_o}$$

$$h_{ri} = -\ \frac{C_{23}\ V_{ci} + C_{33}\ W_{ci}}{2D \cos i_o} \qquad \text{(III-56)}$$

Le principe de la méthode de détermination des défauts de réglage d'héliostats plans consiste donc à appliquer systématiquement ces relations aux valeurs de V_{ci} et W_{ci} mesurées à partir des distributions de luminance expérimentales, enregistrées par exemple sous forme d'un cliché photographique. En traitant de la même façon plusieurs de ces clichés, on obtiendra suffisamment de valeurs de a_{ri} et h_{ri} en vue d'en réaliser une analyse statistique. A titre d'exemple, la planche III-1 nous montre un de ces clichés, ainsi que la simulation qui en a été faite grâce à notre code de calcul "héliostats plans" décrit au chapitre précédent, et dans lequel ont été introduites les valeurs d'erreurs de réglage déduites des relations (III-56). On observe une bonne concordance entre les répartitions de luminance expérimentales et simulées : cela est la preuve que notre approximation du premier ordre est très satisfaisante dans le cas d'héliostats plans.

5.3) Facettes cylindriques

5.3.1) Cas idéal

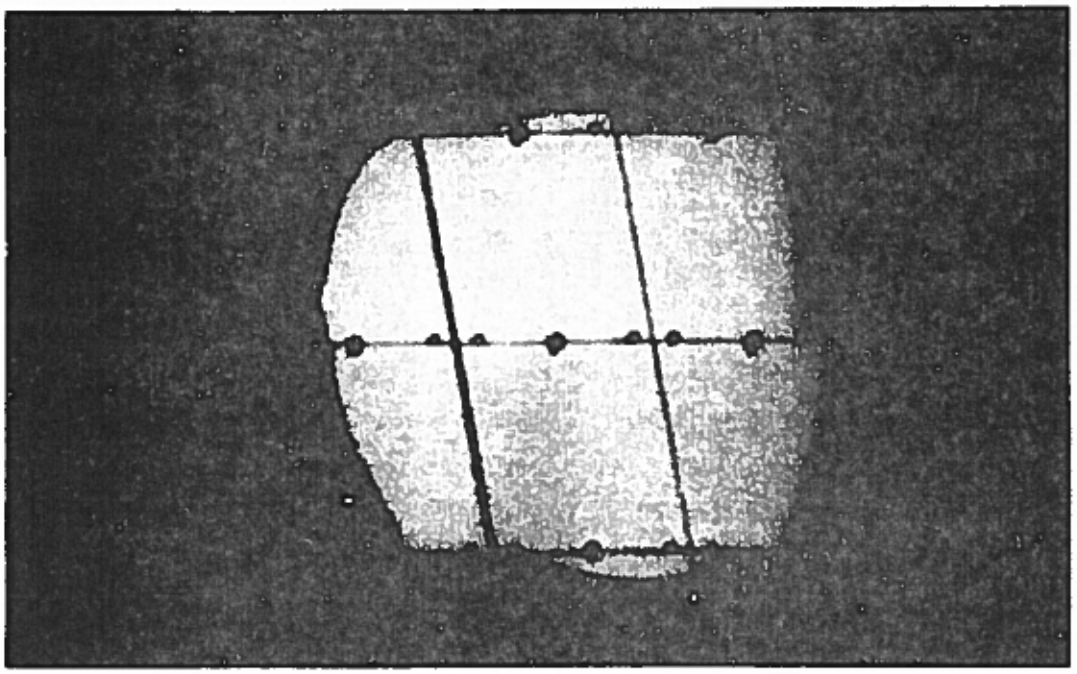
Ici aussi nous commencerons par considérer le cas où $V_o = W_o = 0$. L'équation caractéristique du relief d'un miroir élémentaire cylindrique est, au deuxième ordre :

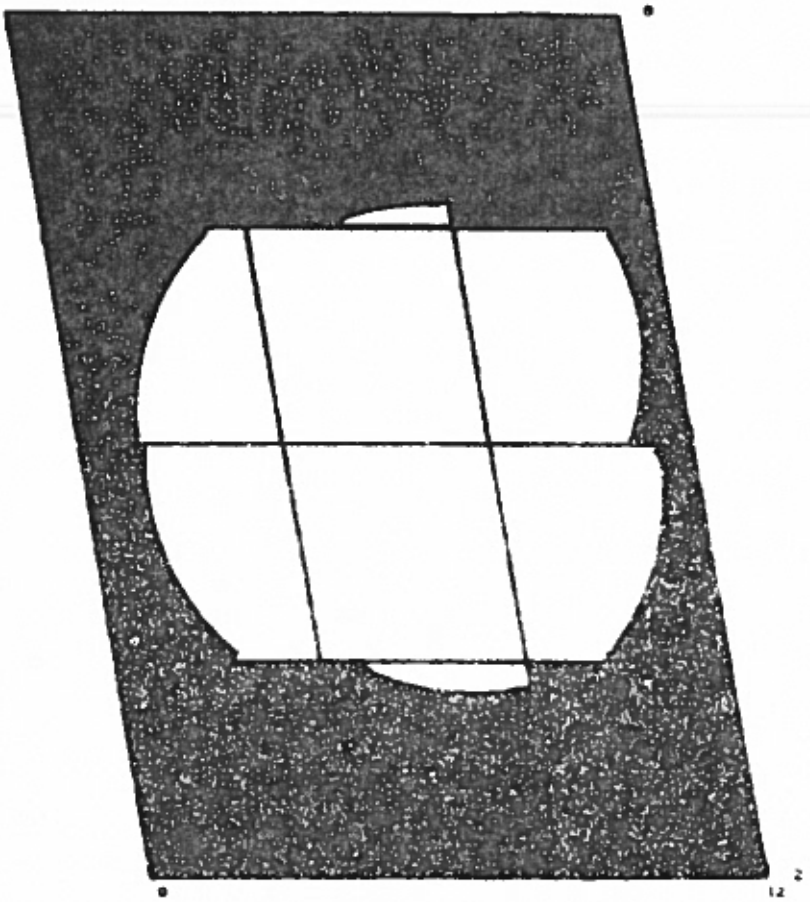
$$X_p = f(Y_p, Z_p) \approx \frac{Z_p^2}{4f} \qquad \text{(III-57)}$$

où 2f est le rayon du cylindre, et en supposant que l'axe de ce dernier est parallèle à l'axe OiYoi : On en déduit que :

$$f'_y \approx 0$$

$$f'_z \approx \frac{Z_p}{2f} \qquad \text{(III-58)}$$





HELIOSTAT 7

LE 10/ 9/ 85 A 10h 41m

COORDONNEES DU CENTRE

YC= 0.798 M
ZC= 1.010 M

ECLAIREMENT AU POINT N°
E= 798.031W/M2

FACTEUR DE REFLEXION
R= 0.7980

Planche III-1 Répartitions de luminance observables sur l'héliostat plan n° 7.

au premier ordre.

Les expressions de A, B et C sont obtenues en reprenant les relations (III-41), avec R_z=2f et en faisant tendre R_y vers l'infini. On trouve alors :

$$A = 1 - \frac{D\,C_{32}^2}{f\cos i_o};\quad B = 1 - \frac{D\,C_{22}^2}{f\cos i_o}\quad \text{et } C = \frac{D\,C_{22}\,C_{32}}{f\cos i_o} \qquad \text{(III-59)}$$

L'équation aux valeurs propres de la matrice q s'écrit par ailleurs :

$$\lambda^2 - \text{trace}(q)\,\lambda + \det(q) = 0 \qquad \text{(III-60)}$$

C'est là une équation du second degré en λ dont le discriminant δ est égal à :

$$\delta = [\text{trace}(q)]^2 - 4\det(q) \qquad \text{(III-61)}$$

En appliquant cette dernière relation aux coefficients A, B et C de la matrice q, on trouve, compte tenu que $C_{22}^2+C_{32}^2 = 1-C_{12}^2 =$ $1 - \sin^2 i_o \cos^2\phi_o$, d'après les expressions générales des matrices de coefficients (C_{ij}) données au paragraphe 5.1 du chapitre précédent :

$$\delta = \frac{D^2}{\cos^2 i_o}\left[\frac{1 - \sin^2 i_o \cos^2\phi_o}{f}\right]^2$$

et on en déduit finalement les valeurs propres λ_1 et λ_2 qui sont les racines de l'équation (III-60)

$$\lambda_1 = 1 - \frac{D(1-\sin^2 i_o \cos^2\phi_o)}{f\cos i_o} \qquad \text{(III-62)}$$

$$\lambda_2 = 1$$

Il est facile alors de déterminer les vecteurs propres $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ qui dirigent les axes OiY'_v et OiZ'_v contenus dans le plan de visée :

$$\vec{e_1} = \begin{bmatrix} -\dfrac{C_{32}}{\sqrt{C_{22}^2+C_{32}^2}} = \alpha \\ \dfrac{C_{22}}{\sqrt{C_{22}^2+C_{32}^2}} = \beta \end{bmatrix} \qquad \vec{e_2} = \begin{bmatrix} \dfrac{C_{22}}{\sqrt{C_{22}^2+C_{32}^2}} \\ \dfrac{C_{32}}{\sqrt{C_{22}^2+C_{32}^2}} \end{bmatrix} \qquad \text{(III-63)}$$

En remplaçant ces dernières relations dans (III-47) et (III-48), et sous réserve que λ_1 soit différent de 0, on arrive enfin à l'équation des courbes iso-luminance observables sur une facette réflectrice cylindrique :

$$1 = \frac{[V'_p-V'_C]^2}{(D\epsilon/\lambda_1)^2} + \frac{[W'_p-W'_C]^2}{D^2\epsilon^2} \qquad \text{(III-64)}$$

Dans le cas général, ces courbes sont des ellipses dont nous donnons

ci-dessous les caractéristiques, lorsque $\epsilon=\epsilon_o$; il s'agit alors des contours de l'image solaire observée à travers la surface réflectrice (fig.III-11).

1) Les grand axe et petit axe de l'ellipse valent respectivement :

$$2a = \frac{2D\epsilon_o}{1 - \frac{D(1-\sin^2 i_o \cos^2\phi_o)}{f \cos i_o}} \quad \text{et} \quad 2b = 2D\epsilon_o \qquad \text{(III-65)}$$

On peut constater que dans le cas d'une facette cylindrique, le petit axe de l'ellipse image du soleil sera toujours égal au diamètre apparent du soleil lui-même.

2) La direction du grand axe de l'ellipse est repérée dans le plan $O_i Y_v Z_v$ par le vecteur $\vec{e_1}$ de coordonnées :

$$\vec{e_1} = \begin{cases} -\dfrac{C_{32}}{\sqrt{C_{22}^2+C_{32}^2}} \\ \dfrac{C_{22}}{\sqrt{C_{22}^2+C_{32}^2}} \end{cases}$$

3) Les coordonnées apparentes du centre de l'ellipse dans le repère $O_i Y'_v Z'_v$ attaché aux axes de l'ellipse sont exprimées par les relations :

$$V'_c = \frac{-C_{32}\,V' + C_{22}\,W'}{\lambda_1 \sqrt{C_{22}^2 + C_{32}^2}}$$

$$W'_c = \frac{-C_{22}\,V' + C_{32}\,W'}{\sqrt{C_{22}^2 + C_{32}^2}} \qquad \text{(III-66)}$$

Par ailleurs, lorsque $D = \frac{f \cos i_o}{1 - \sin^2 i_o \cos^2\phi_o}$, la valeur de λ_1 s'annule; dans ce cas, les courbes iso-luminance se réduisent à une famille de droites parallèles. En pratique cette condition ne sera qu'exceptionnellement réalisée dans le cadre de l'application aux héliostats focalisants du champ de THEMIS : aussi ne l'envisagerons-nous pas ici.

5.3.2) Cas d'un module d'héliostat CETHEL III bis présentant un défaut de réglage

L'équation caractéristique du relief d'un module réflecteur de l'héliostat CETHEL III bis, qui est constitué de trois surfaces cylindriques mises en regard, est donnée par la relation (II-13).

Dans l'annexe III, on a montré que cette équation s'écrit, au second ordre :

$$X_p = f(Y_p, Z_p) \approx n_1 Y_p + \frac{Z_p^2}{4f_M} \qquad \text{(III-67)}$$

Alors $f'_y \approx n_1$

$$f'_z \approx \frac{Z_p}{2f_M} \qquad \text{(III-68)}$$

au premier ordre.

Le terme f'_y est une constante non nulle, qu'il n'est plus possible d'apparenter à la forme générale donnée dans les relations (III-37); il est alors nécessaire de l'introduire directement dans l'équation (III-36).

Par ailleurs, nous devons maintenant utiliser les expressions de V_o et W_o caractéristiques de l'héliostat focalisant réglé sur son axe (relations (III-33)), et qui prennent en compte le dépointage et les déréglages de l'héliostat, ainsi que l'aberration d'astigmatisme. Pour des raisons de commodité, nous avons également regroupé les termes qui dépendent de n_1 dans V_o et W_o.

Alors, les courbes iso-luminance observables à travers le module réflecteur sont les mêmes que celles du paragraphe précédent, à cette différence que les expressions des coordonnées (V'_C, W'_C) du centre des ellipses images, exprimées dans le repère $OiY'_VZ'_V$ lié aux vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$, ont changé. Les relations (III-63) à (III-65), où f_M doit remplacer f, restent donc valables, mais les relations (III-66) doivent être modifiées :

$$V'_C = \frac{-C_{32}(V'+V_o) + C_{22}(W'+W_o)}{\lambda_1 \sqrt{C_{22}^2 + C_{32}^2}}$$

$$W'_C = -\frac{C_{22}(V'+V_o) + C_{32}(W'+W_o)}{\sqrt{C_{22}^2 + C_{32}^2}} \qquad \text{(III-69)}$$

$$\text{où} \begin{cases} V_o = -2DC_{33}(a_p+a_r-n_1)+2DC_{32}(h_p+h_r)-(C_{22}-C_{33}\frac{D}{f_H})Y_{oi}-(C_{23}+C_{32}\frac{D}{f_H})Z_{oi} \\ W_o = 2DC_{23}(a_p+a_r-n_1)-2DC_{22}(h_p+h_r)-(C_{32}+C_{23}\frac{D}{f_H})Y_{oi}-(C_{33}-C_{22}\frac{D}{f_H})Z_{oi} \end{cases} \qquad \text{(III-70)}$$

On voit que le système de relations qui lie V'_C et W'_C aux défauts de réglage en azimut et en hauteur a_r et h_r du module réflecteur est relativement plus complexe que dans le cas des héliostats plans. Toutefois, il s'agit quand même d'un système linéaire dont la plupart des paramètres sont connus; nous allons

maintenant en tirer notre procédure d'estimation des défauts de réglage de l'héliostat focalisant.

5.3.3) Méthode d'estimation de l'erreur de réglage

Dans le cas de l'héliostat focalisant, il n'est pas possible de se rapporter au centre énergétique des répartitions de luminance que l'on observe sur sa surface; en effet, et contrairement au point origine de l'héliostat plan, l'origine O du repère Ro lié à l'héliostat focalisant est un point fixe invariablement situé au centre de sa surface. De plus, les coordonnées V'_c et W'_c du centre des ellipses images sont elles-mêmes rapportées aux points Oi, centres des modules réflecteurs. Enfin, la détermination de ce centre énergétique, dont l'emplacement est lié au dépointage de l'héliostat et à la position du point d'observation M', si elle est simple dans le cas d'un héliostat plan, ne serait pas sans poser de sérieux problèmes pour des surfaces concaves. Dans ces conditions, il ne nous reste guère qu'une solution pour éliminer les termes qui nous embarrassent; il s'agit de la première méthode qui a été évoquée dans le paragraphe 5.2.3.

Nous allons donc supposer que le système d'observation est placé au point O', ce qui a pour effet d'annuler les termes V' et W', et déterminer, pour chaque module réflecteur, ses erreurs cumulées a_{ci} et h_{ci}, telles que :

$$a_{ci} = a_p + a_{ri}$$
$$h_{ci} = h_p + h_{ri}$$

a_{ri} et h_{ri} étant les erreurs de réglage en azimut et en hauteur du $i^{ème}$ module. Lorsque a_{ci} et h_{ci} sont connues pour tous les modules réflecteurs de l'héliostat, on calcule leurs moyennes arithmétiques $\langle a_{ci} \rangle$ et $\langle h_{ci} \rangle$, et on fait l'hypothèse que, pour chacun des modules considérés :

$$a_{ri} = a_{ci} - \langle a_{ci} \rangle$$
$$h_{ri} = h_{ci} - \langle h_{ci} \rangle$$

Cela revient à supposer que les moyennes arithmétiques des erreurs de réglage sont nulles sur tout héliostat du champ de THEMIS. Cette hypothèse n'est pas trop déraisonnable si l'on considère que, dans le cas contraire, il en résulterait un défaut de pointage global de l'ensemble de la surface réflectrice [42].

Par ailleurs, nous négligerons les défauts d'assemblage du module qui ont pour conséquence de modifier les valeurs effectives

de n_1 dans les relations (III-70); bien qu'en principe notre méthode permette l'évaluation de ces défauts, leur prise en compte rendrait l'exploitation des distributions de luminance expérimentales beaucoup trop complexe en pratique. Nous considérerons donc que l'orientation de la section cylindrique centrale d'un module courant est caractéristique de l'orientation globale du module, ce qui nous permettra de prendre n_1 égal à 0 dans les relations (III-70).

Dans ces conditions, il est possible de réécrire les systèmes de relations (III-69) et (III-70) sous une forme plus simple :

$$V'_c - V'_{co} = \frac{2D}{\lambda_1 \sqrt{C_{22}^2+C_{32}^2}} [(C_{22}C_{23}+C_{32}C_{33})a_{ci} - (C_{22}^2+C_{32}^2)h_{ci}]$$

$$W'_c - W'_{co} = \frac{2D}{\sqrt{C_{22}^2+C_{32}^2}} \cos i_o \, a_{ci} \qquad \text{(III-71)}$$

où V'_{co} et W'_{co} sont les coordonnées qui donneraient, dans le repère $OiY'_vZ'_v$, la position du centre de l'ellipse image du soleil s'il n'existait ni dépointage de l'héliostat, ni déréglages de ses modules réflecteurs. V'_{co} et W'_{co} sont données par les relations :

$$V'_{co} = \frac{1}{\lambda_1 \sqrt{C_{22}^2+C_{32}^2}} \{-(C_{22}C_{23}+C_{32}C_{33})Y_{oi} \frac{D}{f_H} + \left[(C_{22}^2+C_{32}^2)\frac{D}{f_H} - \cos i_o\right] Z_{oi}\}$$

$$W'_{co} = \frac{1}{\sqrt{C_{22}^2+C_{32}^2}} \{ \left[C_{22}^2+C_{32}^2 - \cos i_o \frac{D}{f_H}\right] Y_{oi} + [C_{22}C_{23}+C_{32}C_{33}] Z_{oi}\} \qquad \text{(III-72)}$$

On constate qu'en général V'_{co} et W'_{co} ne sont pas nuls, et qu'ils restent liés aux termes Y_{oi} et Z_{oi} caractéristiques de l'astigmatisme de l'héliostat sphérique; ainsi, même dans le cas d'un héliostat parfaitement réglé et parfaitement pointé, les centres des ellipses images ne seront que rarement confondus avec les centres des modules réflecteurs, et il en résultera une perte en concentration. Cela dit, la procédure d'évaluation des défauts de réglage d'un module réflecteur, qui a été réalisée sous la forme d'un petit sous-programme de calcul, peut être décomposée en sept étapes (fig. III-12).

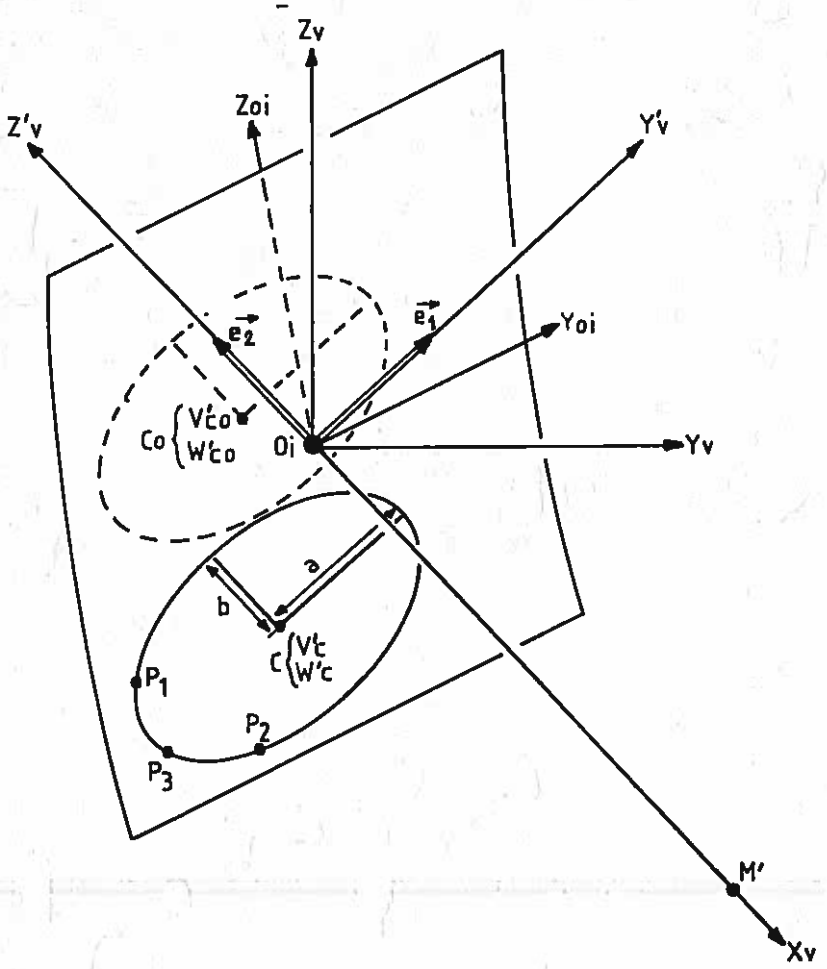


fig III-12 : Evaluation des défauts de réglage d'un module d'héliostat cylindrique.

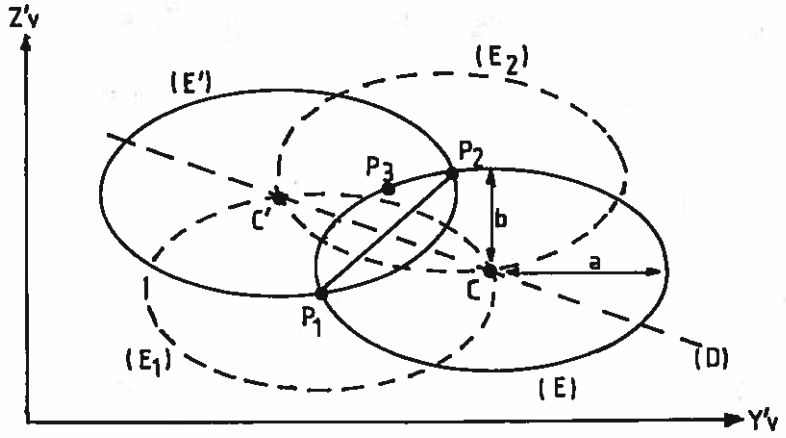


fig III-13: Calcul du centre C de l'ellipse image du soleil à partir des trois points P_1, P_2 et P_3.

1) Des coefficients (C_{ij}) de la matrice $P_{2\ Rro-Ro}$, on déduit les valeurs des axes de l'ellipse, ainsi que leur orientation dans le plan OiYvZv par les relations (III-65) et (III-63). S'il s'avère que λ_1 est nul, on s'arrête ici.

2) Si λ_1 n'est pas nul, on calcule V'_{co} et W'_{co} par les relations (III-72).

3) On choisit trois points P_1, P_2, et P_3 sur les contours de l'ellipse image du soleil effectivement observée à travers le module considéré. Les coordonnées (Y_{p1}, Z_{p1}), (Y_{p2},Z_{p2}), et (Y_{p3},Z_{p3})de ces points sont initialement exprimées dans le repère Rsoi lié au module réflecteur.

4) Par application des relations (III-38), on détermine les coordonnées apparentes (V_{p1}, W_{p1}), (V_{p2},W_{p2}), et (V_{p3},W_{p3}) de ces trois points dans le plan de visée OiYvZv.

5) Par application de la matrice de passage des repères $OiY'_vZ'_v$ à OiYvZv, que l'on note p, aux coordonnées apparentes des points P_1, P_2 et P_3, on déduit les coordonnées apparentes (V'_{p1}, W'_{p1}), (V'_{p2},W'_{p2}), et (V'_{p3},W'_{p3}) de ces trois points dans le repère $OiY'_vZ'_v$ lié aux axes de l'ellipse. La matrice p s'exprime en fonction des cosinus directeurs des vecteurs propres $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ de la matrice q :

$$p = \frac{1}{\sqrt{C_{22}^2+C_{32}^2}} \begin{bmatrix} -C_{32} & C_{22} \\ -C_{22} & -C_{32} \end{bmatrix}$$

6) A partir des nouvelles coordonnées de ces points, on déduit les coordonnées V'_c et W'_c du centre de l'ellipse image à laquelle ils appartiennent, et qui est effectivement observée à travers le module, dans le repère $OiY'_vZ'_v$.

7) Alors, l'inversion du système (III-71) permet de calculer les valeurs de a_{ci} et h_{ci} pour le module considéré.

Parmi ces sept étapes, seule la sixième nécessite quelques explications supplémentaires. Examinons la figure III-13 : le problème consiste à déterminer le centre C d'une ellipse à laquelle

appartiennent les points P_1, P_2 et P_3. Or, on connait déjà les valeurs des axes 2a et 2b de l'ellipse, et on sait qu'ils restent parallèles aux axes du repère $OiY'_vZ'_v$. Les coordonnées V'_c et W'_c du centre de l'ellipse image peuvent donc être déduites du système de relations :

$$\begin{cases} \frac{(V'_{p1}-V'_c)^2}{a^2} + \frac{(W'_{p1}-W'_c)^2}{b^2} = 1 \\ \frac{(V'_{p2}-V'_c)^2}{a^2} + \frac{(W'_{p2}-W'_c)^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

qui expriment que les points P_1 et P_2 appartiennent à l'ellipse cherchée. On remarque que ce système d'intersection entre les ellipses (E_1) et (E_2) peut être réduit à un système d'intersection entre l'ellipse (E_1) et la droite (D) (fig.III-13). En reportant l'équation de cette dernière dans la première relation du système précédent, on arrive à une équation du second degré en W'_c :

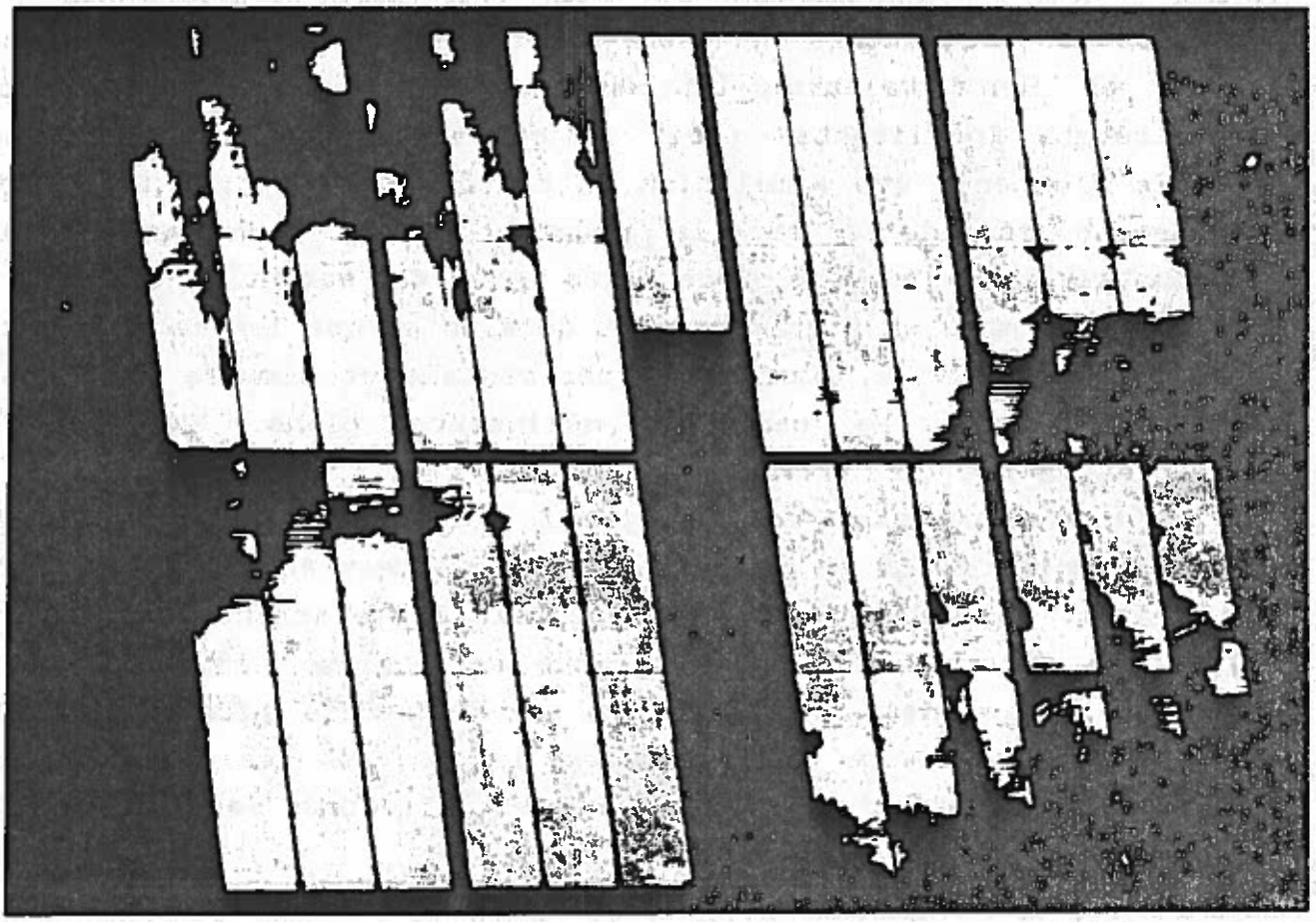
$$\left[\frac{b_o^2}{a_o^2a^2} + \frac{1}{b^2}\right]W'^2_c + 2\left[\frac{(V'_{p1}-c_o/a_o)b_o}{a_oa^2} - \frac{W'_{p1}}{b^2}\right]W'_c + \frac{(V'_{p1}-c_o/a_o)^2}{a^2} + \frac{W'^2_{p1}}{b^2} - 1 = 0$$

où $a_o = \frac{V'_{p2}-V'_{p1}}{a^2}$, $b_o = \frac{W'_{p2}-W'_{p1}}{b^2}$

et $c_o = \frac{1}{2}\left[\frac{V'^2_{p2}-V'^2_{p1}}{a^2} + \frac{W'^2_{p2}-W'^2_{p1}}{b^2}\right]$

Le discriminant de cette équation est toujours supérieur ou égal à 0. Il y a donc en général deux racines distinctes, ou une racine double lorsque les points P_1 et P_2 sont symétriques par rapport à C. Lorsque deux positions du centre de l'ellipse C et C' sont possibles, et que P_3 a été choisi sur l'arc $\overset{\frown}{P_1P_2}$, le centre C de l'ellipse cherchée et le point P_3 ne sont pas situés du même côté de la droite P_1P_2. Cette condition géométrique simple nous permet d'éliminer ici le point C' (fig.III-13).

L'application systématique de cette procédure d'exploitation des distributions de luminance aux héliostats focalisants du champ de THEMIS devrait en principe nous permettre de remonter aux répartitions d'erreurs de réglage caractéristiques de la méthode employée. La planche III-2 présente un cliché des distributions de luminance observées sur l'héliostat 94 lors d'un tir sur la lune (voir le chapitre V). A partir de ce cliché, les erreurs de réglage



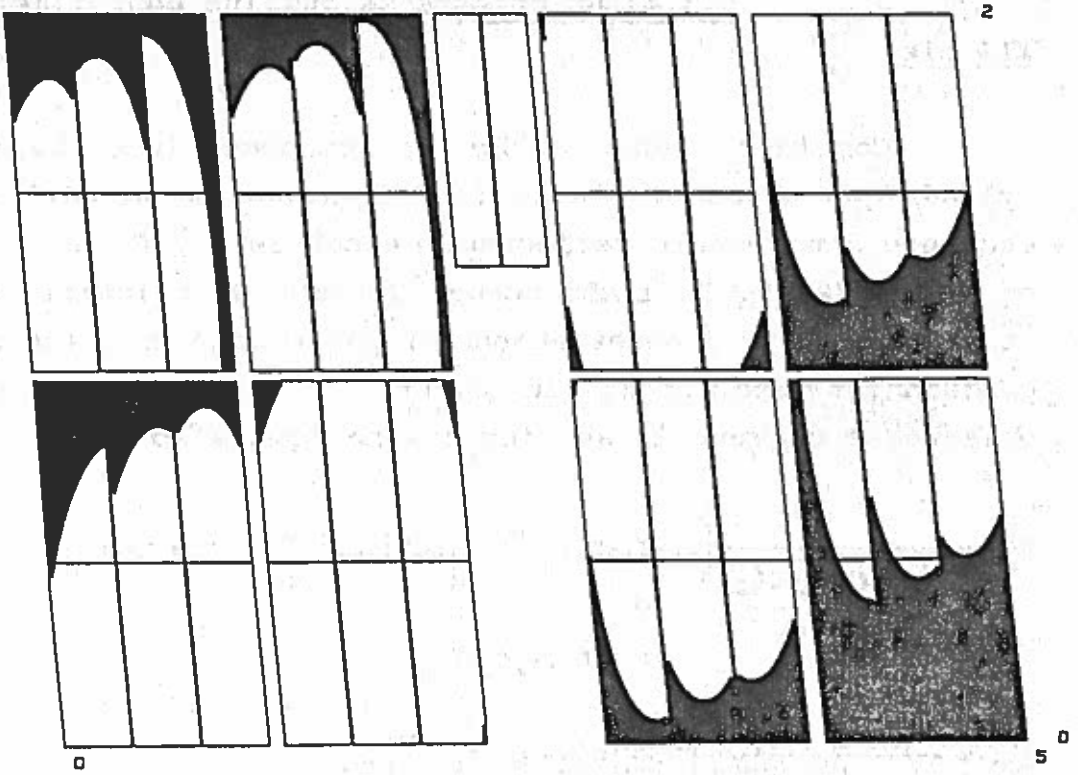


Planche III-2 Répartitions de luminance observables sur l'héliostat CETHEL III bis n° 94, lors d'un tir sur la lune. Cliché effectué à 23 h 24 dans la nuit du 5/2 au 6/2/1985.

des modules réflecteurs ont été estimées par la méthode décrite plus haut, et leurs valeurs, introduites dans notre code de calcul "héliostats focalisants" (voir le chapitre précédent), nous ont permis d'obtenir une simulation du cliché de départ. Celle-ci est également reproduite sur la planche III-2. L'analyse et les commentaires auxquels se prêtent ces résultats seront donnés dans le chapitre V, mais on peut d'ores et déjà noter que les accords entre les répartitions de luminance expérimentale et simulée sont moins bons que dans le cas des héliostats plans. Par contre, l'approximation du premier ordre s'est là aussi révélée très satisfaisante et nous a toujours permis de replacer les points P_1, P_2 et P_3 à moins de 10 cm de leurs positions mesurées sur le cliché. Nous avons estimé que cela correspondait à une erreur inférieure à 0,1 mrad sur la mesure des défauts de réglage, compte tenu de l'amplification des décalages liés à ces défauts suivant le grand axe de l'ellipse image (due au facteur $1/\lambda_1$). Vu les valeurs des déréglages qui affectent communément les héliostats de THEMIS, cette imprécision ne prête pas à conséquence.

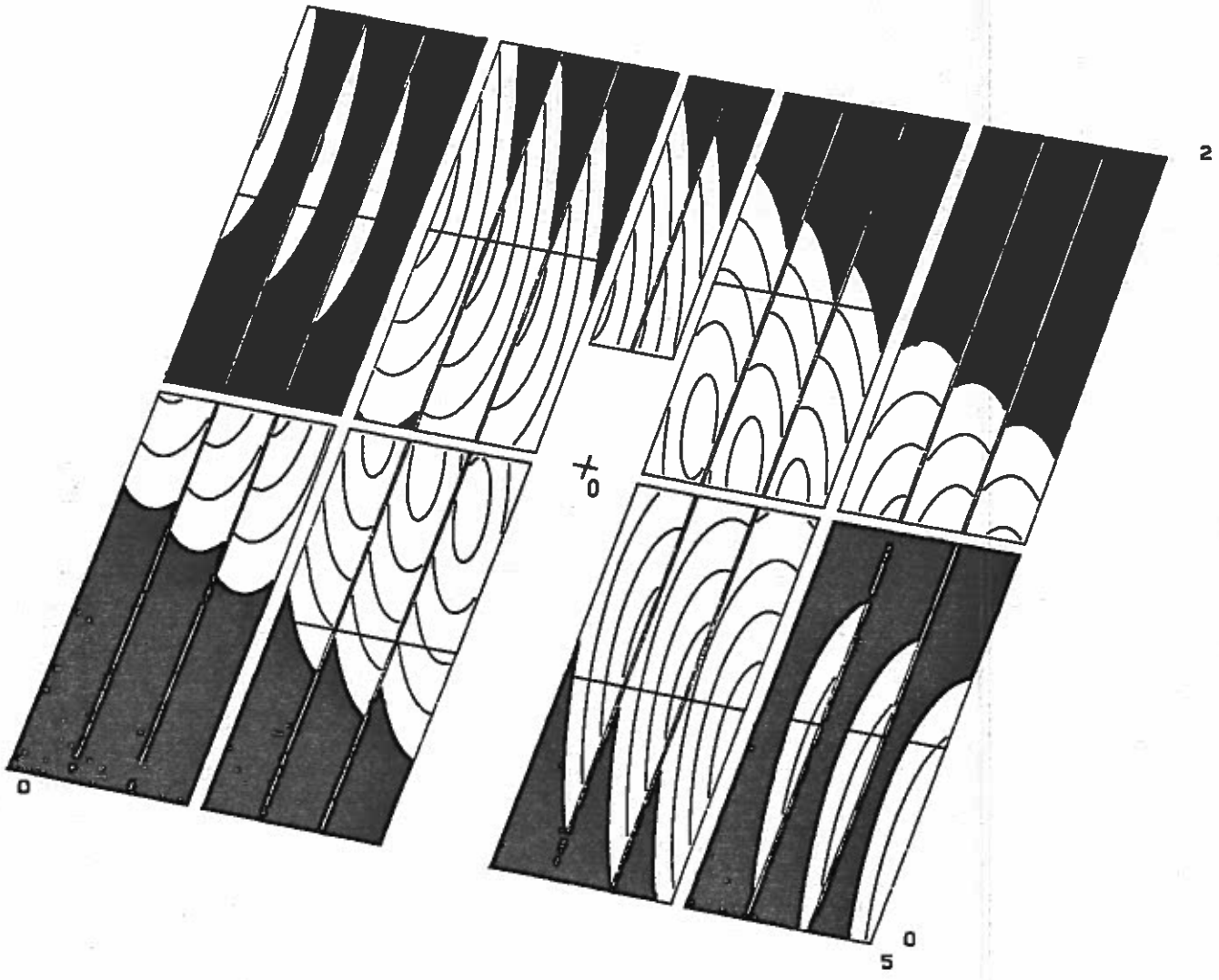
5.3.4) Un critère de qualité pour l'héliostat CETHEL III bis

Considérons une courbe iso-luminance inscrite sur la section cylindrique située à droite (en regardant le miroir) de la section centrale d'un module réflecteur de centre Oi. On a alors $n_1 = (a+a_o/2)/f_M$. En l'absence de défauts de pointage et de réglage, et si le système d'observation est positionné au point de tir O', les coordonnées dans $OiY'_VZ'_V$ du centre de l'ellipse image du soleil observée à travers la section cylindrique s'écrivent :

$$V'_{co} = \frac{1}{\lambda_1 \sqrt{C_{22}^2+C_{32}^2}}\left[C_{12}C_{13}Y_{oi}\frac{D}{f_H} + \left[(C_{22}^2+C_{32}^2)\frac{D}{f_H} - \cos i_o\right]Z_{oi} + 2\,D\,C_{12}C_{13}n_1\right]$$

$$W'_{co} = \frac{1}{\sqrt{C_{22}^2+C_{32}^2}}\left[\left[C_{22}^2+C_{32}^2-\cos i_o\frac{D}{f_H}\right]Y_{oi} - C_{12}C_{13}Z_{oi} - 2D\cos i_o\, n_1\right]$$

Considérons maintenant la courbe iso-luminance inscrite sur la section cylindrique qui est symétrique de la précédente par



HELIOSTAT 93

LE 21/ 6/ 86 A 16: 0: 0

REGLAGE INITIAL :
SUR L'AXE

COORDONNEES DU POINT M'
FO'= 1.650 M
Y'= 2.035 M
Z'= -12.260 M

DEPOINTAGE DE L'HELIOSTAT
XDP= 0.000 M
YDP= 0.000 M
ZDP= 0.000 M

ECLAIREMENT AU POINT M'
E= 12264.586W/M2

FACTEUR DE CONCENTRATION
C= 12.2648

fig III-14 : Répartitions de luminance observables sur un héliostat focalisant parfaitement pointé et parfaitement réglé. Les courbes iso-luminance intermédiaires correspondent à des valeurs relatives de 0,76, 0,88, 0,95 et 0,99.

rapport au centre O de l'héliostat : il faut alors remplacer Y_{oi}, Z_{oi} et n_1 respectivement par $-Y_{oi}$, $-Z_{oi}$ et $-n_1$ dans les relations précédentes. On constate que les coordonnées V''_{co} et W''_{co} du centre de l'ellipse image observée sur cette section cylindrique sont telles que :

$$V''_{co} = - V'_{co}$$
$$W''_{co} = - W'_{co}$$

dans $OiY'_vZ'_v$. Comme d'autre part, les ellipses images présentent toutes les mêmes dimensions et orientations, lesquelles sont obtenues à partir des coefficients (C_{ij}) de la matrice $P_{2\ Rro-Ro}$, on peut conclure que, dans le cas d'un héliostat focalisant parfaitement réglé et parfaitement asservi sur le soleil, les répartitions de luminance doivent être symétriques par rapport au centre O de l'héliostat.

On retrouve ce résultat sur la figure III-14, qui nous présente la simulation graphique des répartitions de luminance observables sur la surface d'un tel héliostat. On peut constater que la symétrie n'y est pas rigoureuse : cela est dû essentiellement au fait que nous avons confondu les matrices P_{Rri-Ro} et $P_{2\ Rro-Ro}$ (cf. paragraphe 4.2.1). Il s'agit donc d'un critère du premier ordre, qui semble valable sur l'ensemble du champ d'héliostats de THEMIS. En se reportant alors à la photographie VII qui représente l'aspect du champ complet lors d'une expérience de tir sur la lune (cf. chapitre V), on pourra essayer de repérer les héliostats qui sont bien réglés et bien pointés : nous laissons au lecteur le soin de les dénombrer...

Enfin, ce critère de qualité s'applique également au cas des héliostats focalisants réglés en dehors de leur axe, puisqu'au premier ordre, ce réglage n'introduit que des termes proportionnels à Y_{oi} et Z_{oi} dans l'expression de $\overrightarrow{\Delta N_{oi}}$, et donc de $\overrightarrow{R_{po}}$ (voir paragraphe 4.2.2).

5.4) Facettes sphériques

Ces facettes seront surtout utilisées pour équiper des concentrateurs fixes de fours solaires [5]. Nous ne nous intéressons ici qu'au cas où V', W', V_o et W_o sont nuls.

Au deuxième ordre, l'équation caractéristique du relief d'une facette réflectrice sphérique s'écrit :

$$X_p = f(Y_p, Z_p) \approx \frac{Y_p^2 + Z_p^2}{4f} \qquad \text{(III-73)}$$

Photographie VII Le champ d'héliostats de THEMIS lors d'un tir sur la lune.

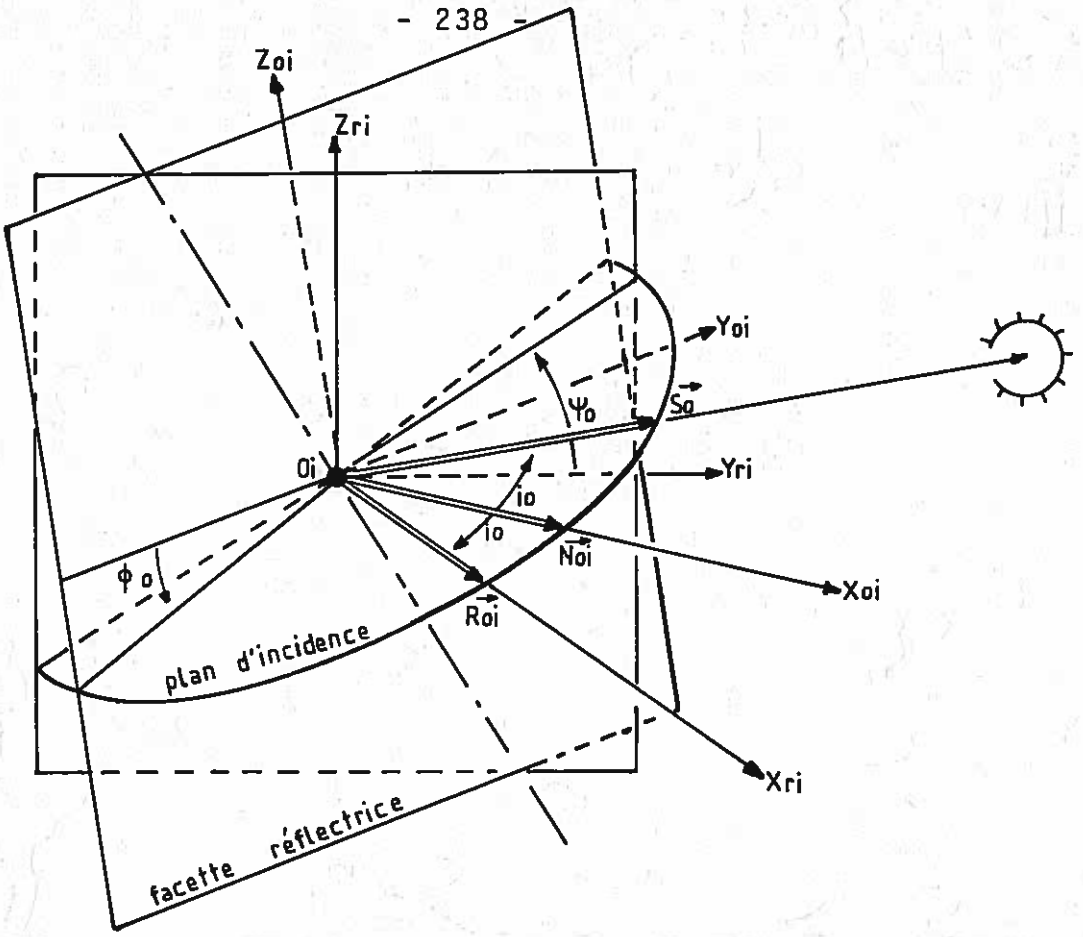


fig III-15 : Géométrie et systèmes d'axes pour une facette réflectrice montée sur un concentrateur fixe.

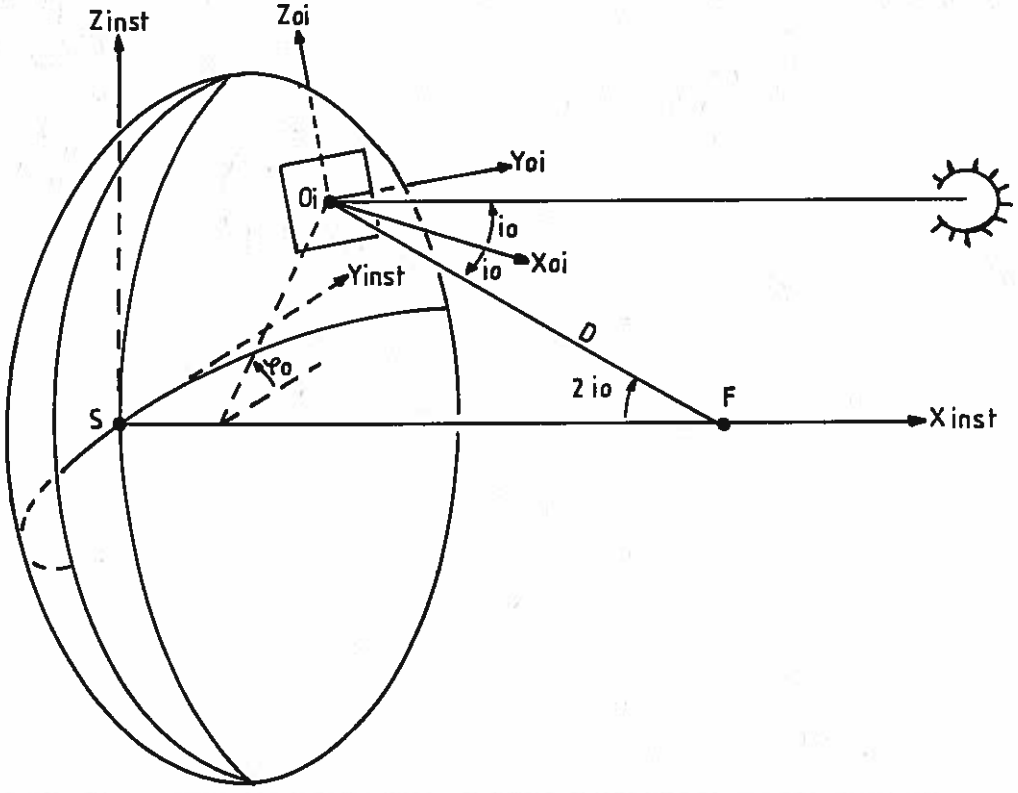


fig III-16 : Repérage d'une facette réflectrice sur la structure d'un concentrateur.

où 2f est le rayon de la sphère, et f la focale de la facette; dans le cadre de notre approximation, le relief sphérique peut effectivement être assimilé au relief parabolique, ainsi que l'avaient confirmé les résultats de Zakhidov et Khodzhaev [74-75]. L'expression des dérivées partielles f'_y et f'_z est alors :

$$f'_y \approx \frac{Y_D}{2f}$$
$$f'_z \approx \frac{Z_D}{2f} \qquad \text{(III-74)}$$

au premier ordre.

Les expressions de A, B, et C s'obtiennent en reprenant les relations (III-41) avec $R_y = R_z = 2f$. On trouve :

$$A = 1 - \frac{D(1 - \sin^2 i_o \sin^2 \psi_o)}{f \cos i_o}$$

$$B = 1 - \frac{D(1 - \sin^2 i_o \cos^2 \psi_o)}{f \cos i_o}$$

$$C = - \frac{D \sin^2 i_o \cos \psi_o \sin \psi_o}{f \cos i_o}$$

en tenant compte des expressions générales des matrices de coefficients (C_{ij}) données au paragraphe 5.1 du chapitre précédent: ainsi ψ_o est l'angle que fait, dans le plan OiYriZri, la trace du plan d'incidence des rayons solaires avec l'axe OiYri (fig.III-15). Par diagonalisation de la matrice q, on en déduit alors les valeurs propres λ_1 et λ_2, et les vecteurs propres $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ caractéristiques de la facette sphérique :

$$\lambda_1 = 1 - \frac{D \cos i_o}{f}$$
$$\lambda_2 = 1 - \frac{D}{f \cos i_o} \qquad \text{(III-75)}$$

$$\vec{e_1} = \begin{vmatrix} -\frac{C_{31}}{\sqrt{C_{21}^2+C_{31}^2}} = -\sin\psi_o \\ \frac{C_{21}}{\sqrt{C_{21}^2+C_{31}^2}} = \cos\psi_o \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{e_2} = \begin{vmatrix} -\cos\psi_o \\ -\sin\psi_o \end{vmatrix} \qquad \text{(III-76)}$$

Alors, les axes de symétrie des courbes iso-luminance observables sur une facette réflectrice sphérique seront toujours perpendiculaire et parallèle à la trace du plan d'incidence dans le plan de visée (c'est le vecteur unitaire $\vec{e_2}$ qui dirige cette dernière).

Enfin, le facteur de concentration intrinsèque C_I de la facette s'écrit, d'après la relation (III-50) :

$$C_I = \frac{1}{\left[1 - \frac{D \cos i_o}{f}\right]\left[1 - \frac{D}{f \cos i_o}\right]} \qquad \text{(III-77)}$$

Nous allons à présent étudier l'allure et les caractéristiques des courbes iso-luminance observables sur une facette réflectrice sphérique, en fonction de sa focale f, et de son emplacement possible sur la structure d'un concentrateur fixe. La position du centre Oi de la facette sera repérée par les angles $2i_o$ et φ_o (fig.III-16), où $2i_o$ est l'angle d'ouverture de la couronne qui contient la facette réflectrice. La distance D qui sépare le point Oi du foyer F de l'installation est alors imposée par la géométrie du concentrateur lui-même (paraboloïdal, sphérique, etc...).

Pour obtenir une concentration optimale au foyer, l'optique géométrique nous dit que pour chaque facette, f doit être pris égal à D. Mais en pratique, on se limite à un petit nombre de valeurs de f sur l'ensemble de la surface du concentrateur, en vue d'en réduire les coûts de réalisation. L'étude des répartitions de luminance observables sur des facettes sphériques de focale différente de D, ainsi que de leur facteur de concentration, est alors une aide pour établir l'optimum technico-économique d'une installation en projet, et destinée à être équipée de telles facettes. De plus, dans le cas d'une installation déjà existante, elle peut servir à l'évaluation d'éventuels défauts de courbure des facettes réflectrices. Mais nous nous contenterons plus modestement d'étudier ici quatre cas particuliers.

1) <u>$f = D \cos i_o$</u> : le point d'observation M', qui est ici confondu avec F, est exactement situé sur la focale sagittale de la facette sphérique (cf.relations (I-6)). Par ailleurs $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = - \operatorname{tg}^2 i_o$. L'équation des courbes iso-luminance s'obtient donc en remplaçant directement ces valeurs dans la relation (III-46), ce qui nous donne :

$$D^2 \epsilon^2 = \operatorname{tg}^4 i_o \; W_p'^2$$

Les courbes iso-luminance se réduisent à deux droites parallèles au vecteur $\vec{e_1}$, d'équations :

$$W_p' = \pm \frac{D\epsilon}{\operatorname{tg}^2 i_o}$$

Nous avons représenté sur la figure III-17 l'allure des

contours apparents de l'image du soleil observée à travers la facette, obtenues pour $\epsilon = \epsilon_o$

2) $\underline{f = D}$: le point d'observation est situé sur le cercle de moindre diffusion de la facette réflectrice. Nous devrions donc retrouver ici un phénomène de courbure de champ. Dans ce cas :

$$\lambda_1 = 1 - \cos i_o \quad \text{et} \quad \lambda_2 = 1 - \frac{1}{\cos i_o}$$

Si i_o est différent de 0, ce qui est toujours le cas en pratique, le contour apparent de l'image du soleil est une ellipse dont les grand et petit axes valent respectivement :

$$2a = \frac{2\,D\,\epsilon_o}{1-\cos i_o} \quad \text{et} \quad 2b = \frac{2\,D\,\epsilon_o \cos i_o}{1-\cos i_o}$$

et le grand axe de l'ellipse est perpendiculaire à la trace du plan d'incidence dans le plan de visée (fig.III-17).

3) $\underline{f=D/\cos i_o}$: le point d'observation est exactement situé sur la focale tangentielle de la facette. Alors $\lambda_1 = \sin^2 i_o$ et $\lambda_2 = 0$. L'équation du contour apparent de l'image du soleil observée à travers la facette est donc, d'après la relation (III-46) :

$$D^2\epsilon_o^2 = \sin^4 i_o \; V_p'^2$$

Ici aussi, les courbes iso-luminance se réduisent à deux droites parallèles, d'équations :

$$V_p' = \pm \frac{D\,\epsilon_o}{\sin^2 i_o}$$

Toutefois, ces droites sont ici dirigées suivant le vecteur $\vec{e_2}$, et sont donc parallèles à la trace du plan d'incidence dans le plan de visée (fig.III-17).

4) $\underline{f = (D \cos i_o + D/\cos i_o)/2}$: cette solution revient à choisir, pour le rayon de la facette sphérique, une valeur égale à la moyenne arithmétique des rayons de courbure principaux d'un paraboloïde contenant le point Oi. Dans ce cas :

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \frac{\sin^2 i_o}{1 + \cos^2 i_o}$$

et le contour apparent de l'image du soleil à travers la facette réflectrice est alors un cercle de rayon $\frac{1+\cos^2 i_o}{\sin^2 i_o} D\epsilon_o$ (fig.III-17). Hormis le cas où $i_o=0$, ce résultat n'est possible que pour cette valeur particulière de f .

Evidemment, tout ceci n'est pas sans rappeler certains résultats de la théorie des aberrations du 3ème ordre : on sait en effet que dans le cadre de celle-ci les termes caractéristiques des aberrations d'astigmatisme et de courbure de champ sont proportionnels aux ouvertures des systèmes étudiés; ces termes étant également pris en compte dans notre approximation (termes en Y_p et Z_p), il n'est donc pas étonnant de retrouver, sous une forme différente, ce résultat classique qu'est l'existence des focales tangentielle et sagittale. Mais l'aspect énergétique de la question nous concerne au moins autant que son aspect géométrique; par exemple il n'est pas immédiat de déterminer, entre les 2ème et 4ème solutions, laquelle est la meilleure. Il nous a donc paru intéressant d'utiliser notre code de calcul des répartitions de densité de flux formées par un concentrateur fixe, décrit au chapitre précédent, et appliqué au cas de facettes sphériques parfaitement réglées en orientation, en vue de déterminer les facteurs de concentration effectivement réalisés par une facette de dimensions données, dans les quatre cas envisagés plus haut, et également dans le but de vérifier la validité de l'approximation.

La planche III-3 présente la simulation des courbes iso-luminance observables sur une facette réflectrice sphérique de 50 cm de côté, située à 18 m du point d'observation F, et pour des valeurs de $2i_o=60°$ et $\varphi_o=0°$. De même, la planche III-4 représente les courbes iso-luminance d'une facette située à même distance du foyer, et pour laquelle $\varphi_o=45°$. Nous nous sommes efforcés d'indiquer sur ces planches quelques éléments des figures du premier ordre dont les caractéristiques ont été examinées plus haut.

Au vu de ces résultats, il apparaît que l'approximation du premier ordre est, une fois de plus, satisfaisante dans le cas de facettes de faible ouverture. On constate par ailleurs que les quatre solutions envisagées sont relativement proches les unes des autres en ce qui concerne le facteur de concentration atteint en F, avec toutefois un léger avantage pour les deuxième et quatrième solutions. Mais l'enseignement principal qu'on peut tirer de ces

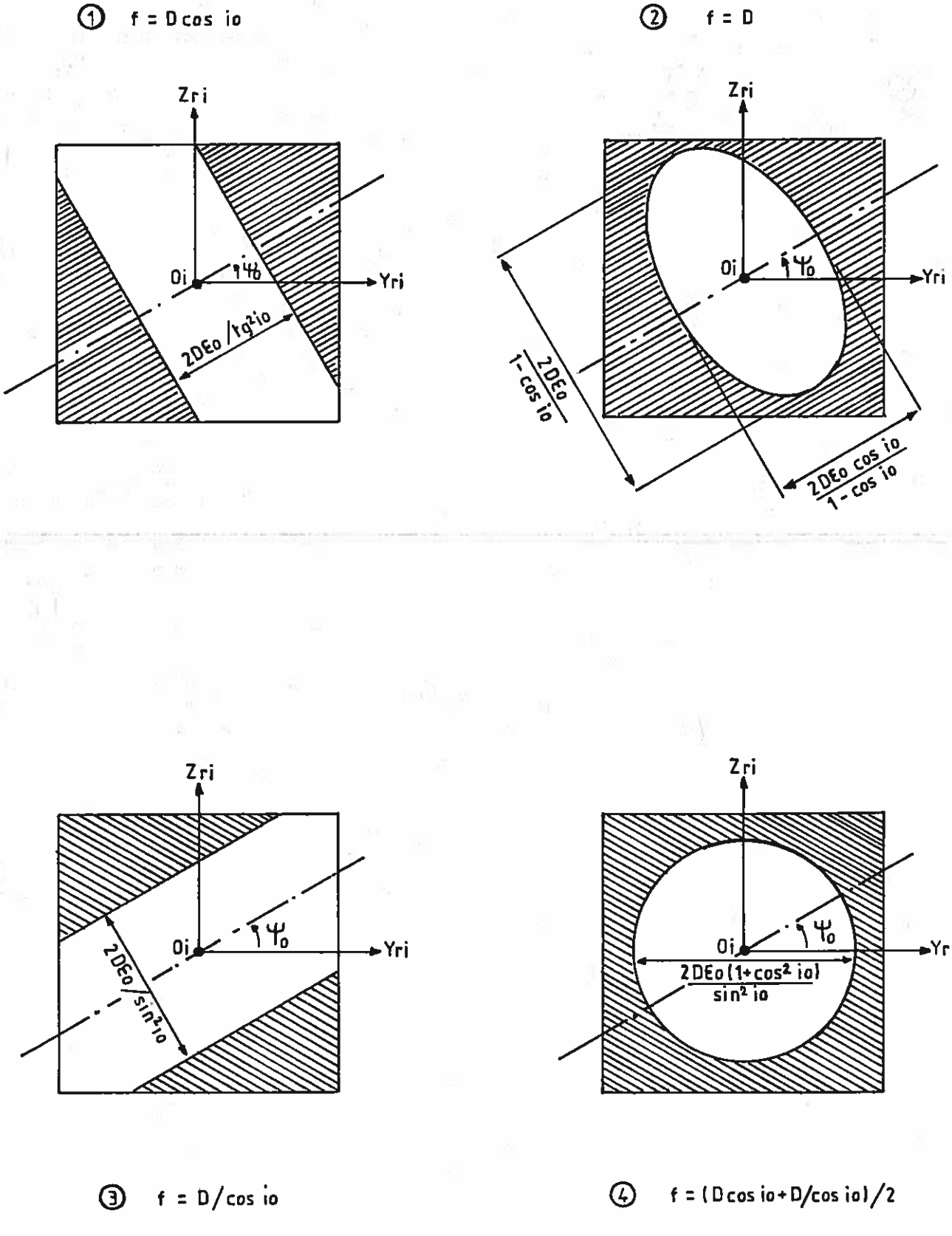
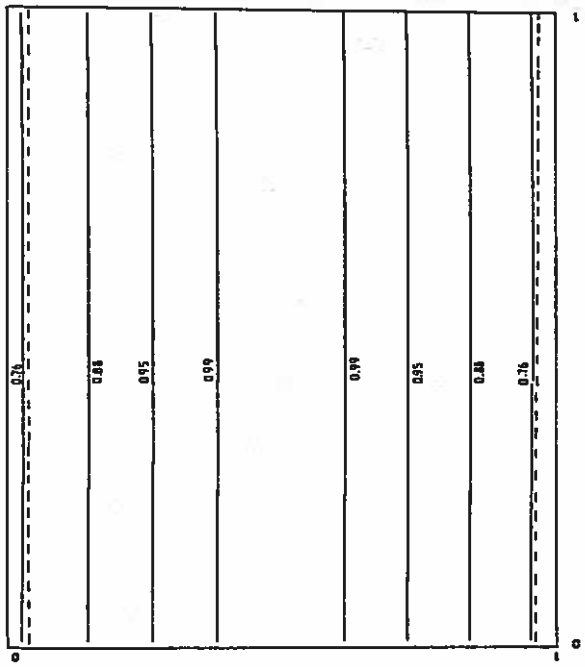


fig III-17 : Répartitions de luminance observables sur une facette réflectrice sphérique dans le cadre de l'approximation du premier ordre.



FACETTE SPHERIQUE
DE FOCALE 15.589
D= 18.

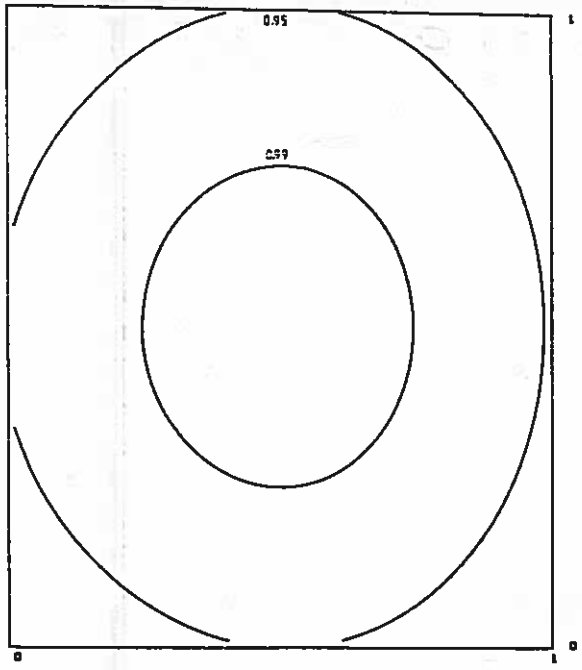
ANGLE D'INCIDENCE= 30.
ANGLE PHI= 0.

COORDONNEES DU POINT N'
FO'= 0.000 M
Y'= 0.000 M
Z'= 0.000 M

ECLAIREMENT AU POINT N'
E= 3599.585W/M2

FACTEUR DE CONCENTRATION
C= 3.5998

①



FACETTE SPHERIQUE
DE FOCALE 18.000
D= 18.

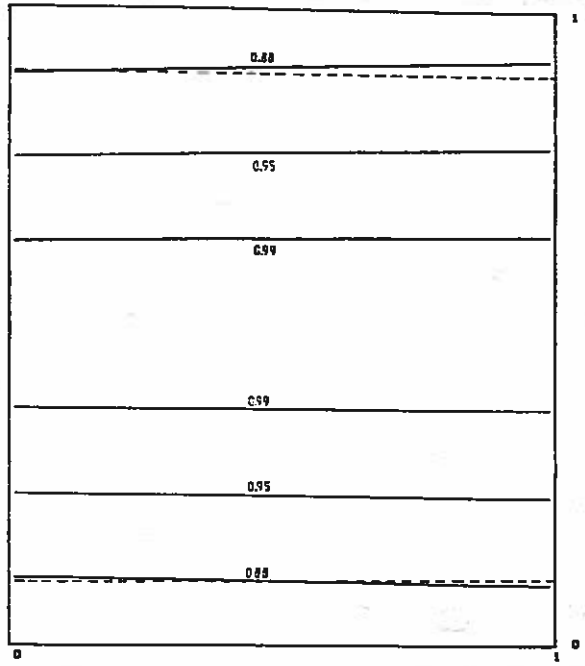
ANGLE D'INCIDENCE= 30.
ANGLE PHI= 0.

COORDONNEES DU POINT N'
FO'= 0.000 M
Y'= 0.000 M
Z'= 0.000 M

ECLAIREMENT AU POINT N'
E= 3911.151W/M2

FACTEUR DE CONCENTRATION
C= 3.9112

②



FACETTE SPHERIQUE
DE FOCALE 20.785
D= 18.

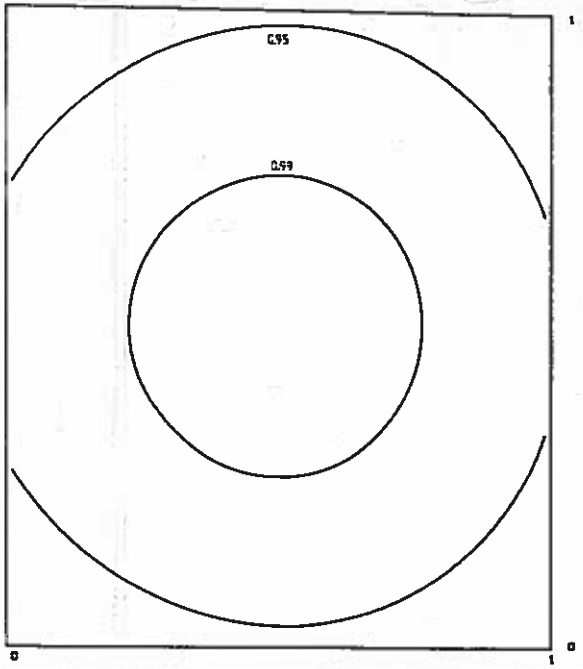
ANGLE D'INCIDENCE= 30.
ANGLE PHI= 0.

COORDONNEES DU POINT N'
FO'= 0.000 M
Y'= 0.000 M
Z'= 0.000 M

ECLAIREMENT AU POINT N'
E= 3697.458W/M2

FACTEUR DE CONCENTRATION
C= 3.6975

③



FACETTE SPHERIQUE
DE FOCALE 18.187
D= 18.

ANGLE D'INCIDENCE= 30.
ANGLE PHI= 0.

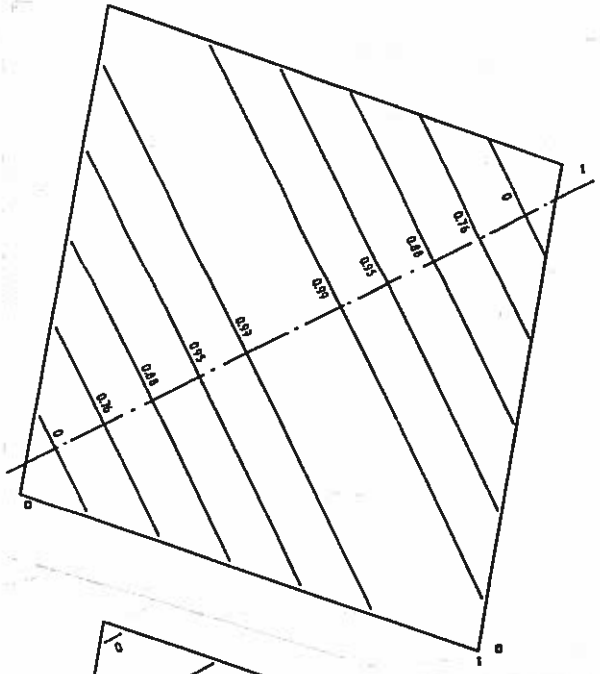
COORDONNEES DU POINT N'
FO'= 0.000 M
Y'= 0.000 M
Z'= 0.000 M

ECLAIREMENT AU POINT N'
E= 3911.816W/M2

FACTEUR DE CONCENTRATION
C= 3.9119

④

Planche III-3 Répartitions de luminance théoriques observables sur une facette réflectrice sphérique.



FACETTE SPHERIQUE
DE FOCALE 15.588
D= 18.

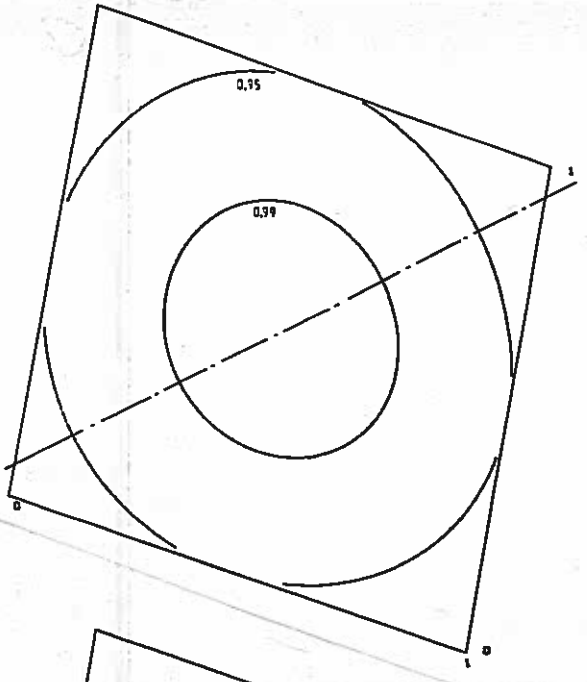
ANGLE D'INCIDENCE= 30.
ANGLE PHI= 45.

COORDONNEES DU POINT N'
FO'= 0.000 M
Y'= 0.000 M
Z'= 0.000 M

ECLAIREMENT AU POINT N'
E= 3512.689W/M2

FACTEUR DE CONCENTRATION
C= 3.5127

①



FACETTE SPHERIQUE
DE FOCALE 18.000
D= 18.

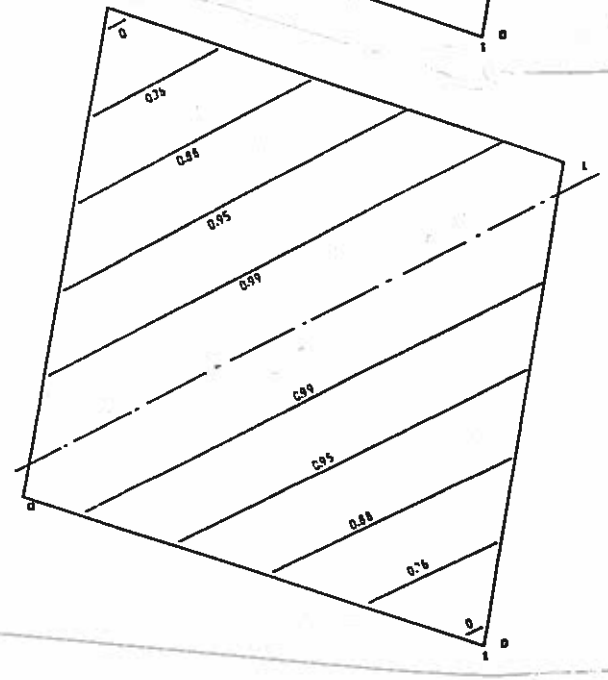
ANGLE D'INCIDENCE= 30.
ANGLE PHI= 45.

COORDONNEES DU POINT N'
FO'= 0.000 M
Y'= 0.000 M
Z'= 0.000 M

ECLAIREMENT AU POINT N'
E= 3811.222W/M2

FACTEUR DE CONCENTRATION
C= 3.8113

②



FACETTE SPHERIQUE
DE FOCALE 20.785
D= 18.

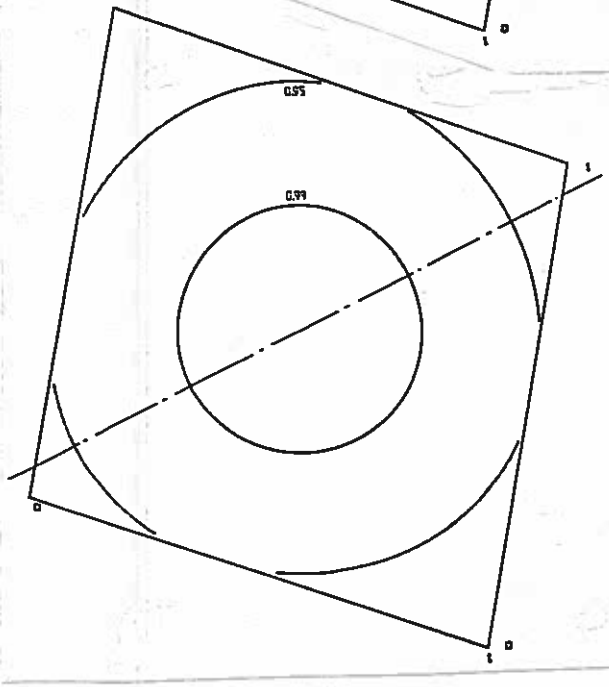
ANGLE D'INCIDENCE= 30.
ANGLE PHI= 45.

COORDONNEES DU POINT N'
FO'= 0.000 M
Y'= 0.000 M
Z'= 0.000 M

ECLAIREMENT AU POINT N'
E= 3675.690W/M2

FACTEUR DE CONCENTRATION
C= 3.6757

③



FACETTE SPHERIQUE
DE FOCALE 18.197
D= 18.

ANGLE D'INCIDENCE= 30.
ANGLE PHI= 45.

COORDONNEES DU POINT N'
FO'= 0.000 M
Y'= 0.000 M
Z'= 0.000 M

ECLAIREMENT AU POINT N'
E= 3811.834W/M2

FACTEUR DE CONCENTRATION
C= 3.8119

④

Planche III-4 Répartitions de luminance théoriques observables sur une facette réflectrice sphérique.

simulations est que le plus souvent, les contours apparents de l'image du disque solaire déborderont du cadre de la facette réflectrice sphérique, et ceci même en présence de défauts de réglage, qui auraient pour conséquence de les décaler (les termes V_o et W_o étant alors introduits dans les équations des courbes iso-luminance, comme il est indiqué au paragraphe 5.1). Par conséquent, une méthode d'estimation du type de celles qui ont été définies pour les héliostats plans et focalisants n'est plus possible, et il faut alors se donner les moyens de déterminer précisément les courbes iso-luminance intermédiaires sur la surface réflectrice. Mais comme d'autre part nous ne sommes pas du tout assurés que les facettes réflectrices du concentrateur du four de 1000 kW d'Odeillo soient sphériques, nous n'avons pas développé ici de méthode d'estimation particulière.

Par ailleurs, il aurait certainement été intéressant de pousser plus loin les calculs numériques, en faisant varier les dimensions de la facette, les angles i_o et φ_o, et en considérant plusieurs valeurs de f intermédiaires entre celles que nous avons choisies. Mais en fait ce travail relèverait plus du dimensionnement d'une installation en projet que de l'étude des défauts spécifiques d'une installation existante, et sort donc du cadre de notre sujet.

5.5) Facettes localement paraboloïdales

Ainsi qu'on l'a vu au chapitre précédent, ces facettes sont essentiellement destinées aux concentrateurs de fours solaires, bien que jusqu'ici elles n'aient été effectivement fabriquées que pour une seule installation [18]; leur coût est en effet prohibitif. Toutefois Igel et Hugues [46] ont montré qu'elles pourraient être avantageusement utilisées sur des héliostats à monture différente de la monture altazimutale classique. Comme d'autre part elles représentent le relief idéal des facettes réflectrices d'un concentrateur paraboloïdal tel celui d'Odeillo, leur étude théorique n'est pas sans intérêt.

On rappelle (voir Annexe V) que l'expression approchée du relief d'une facette localement paraboloïdale est définie, au second ordre, par l'équation :

$$X_p = f(Y_p, Z_p) \approx \frac{A_p^2}{4f/\cos^3 i_o} + \frac{B_p^2}{4f/\cos i_o} \qquad \text{(III-78)}$$

où f est la focale du paraboloïde, et avec :

$$A_p = \cos \phi_o \, Y_p + \sin \phi_o \, Z_p$$
$$B_p = - \sin \phi_o \, Y_p + \cos \phi_o \, Z_p \qquad \text{(III-79)}$$

De plus, l'expression des dérivées partielles f'_y et f'_z est :

$$f'_y = \frac{\cos i_o}{2f}[\cos \phi_o \cos^2 i_o \, A_p - \sin \phi_o \, B_p]$$
$$f'_z = \frac{\cos i_o}{2f}[\sin \phi_o \cos^2 i_o \, A_p + \cos \phi_o \, B_p] \qquad \text{(III-80)}$$

au premier ordre.

Il est possible de réécrire les relations (III-80) sous la forme :

$$f'_y = \frac{\cos i_o}{2f}[(1-\cos^2\phi_o \sin^2 i_o)Y_p - \sin \phi_o \cos \phi_o \sin^2 i_o \, Z_p] =$$

$$\frac{\cos i_o}{2f} \; [(C_{22}^2 + C_{32}^2)Y_p - C_{12} \, C_{13} \, Z_p]$$

$$f'_z = \frac{\cos i_o}{2f}[- \sin \phi_o \cos \phi_o \sin^2 i_o \, Y_p + (1-\sin^2\phi_o \sin^2 i_o)Z_p] =$$

$$\frac{\cos i_o}{2f} \; [- C_{12} \, C_{13} \, Y_p + (C_{23}^2 + C_{33}^2)Z_p]$$

compte tenu des expressions des matrices de coefficients (C_{ij}) données dans le paragraphe 5.1 du chapitre précédent. Alors, en se servant des propriétés particulières de ces matrices, et sachant que $D=f/\cos^2 i_o$ dans le cas d'un concentrateur paraboloïdal, on peut déduire, d'après les relations précédentes, que :

$$2D[C_{33} \, f'_y - C_{32} \, f'_z] = C_{22} \, Y_p + C_{23} \, Z_p = V_p$$
$$2D[- C_{23} \, f'_y + C_{22} \, f'_z] = C_{32} \, Y_p + C_{33} \, Z_p = W_p \qquad \text{(III-81)}$$

Pour exprimer l'équation des courbes iso-luminance on se sert des relations (III-36) et (III-81). On trouve alors que :

$$D^2\epsilon^2 = (V'+V_o)^2 + (W'+W_o)^2 \qquad \text{(III-82)}$$

et la notion de courbe iso-luminance perd tout son sens, puisqu'on arrive à une valeur de ϵ constante sur toute la surface de la facette réflectrice (cela correspond d'ailleurs au cas où la matrice q est nulle). On peut alors énoncer le résultat suivant, valable pour tout concentrateur paraboloïdal : la luminance qui est observable sur la surface d'une facette réflectrice localement paraboloïdale est constante, et ne dépend que du défaut de réglage de la facette, du

défaut de pointage de l'héliostat plan qui l'éclaire (*), et de la position du point d'observation par rapport au foyer du concentrateur.

Bien sûr, ce résultat demandait à être confirmé par notre code de calcul des éclairements formés par un concentrateur fixe. Nous avons donc utilisé l'équation exacte du relief localement paraboloïdal, donnée par (II-19), et introduit des défauts de réglage aléatoires sur un grand nombre de facettes réparties sur toute la surface du concentrateur du four de 1000 kW d'Odeillo. Dans tous les cas, nous avons constaté que les valeurs théoriques de ϵ restent constantes à 10^{-5} rad près sur la surface des facettes réflectrices. Cette quantité, qui est de l'ordre du millième du diamètre apparent du soleil, est en fait du deuxième ordre par rapport aux angles d'ouverture des facettes, et on peut donc considérer que là aussi, l'approximation du premier ordre donne toute satisfaction. Toutefois, et pour les mêmes raisons que dans le cas de la facette sphérique, nous n'avons pas jugé utile de donner ici une procédure d'estimation des défauts de réglage (qui pourrait se réduire à mesurer les luminances réfléchies par les facettes). Il est en effet plus urgent d'améliorer notre connaissance du relief des facettes réflectrices déformées sous contrainte mécanique qui équipent le concentrateur du four solaire de 1000 kW d'Odeillo.

6) CONCLUSION

Au cours de ce chapitre, nous avons déterminé les expressions approchées de l'angle ϵ en fonction du type d'installation étudié (simple ou double réflexion) et de la géométrie des facettes réflectrices qui l'équipent. Ce développement de ϵ au premier ordre nous a notamment permis de retrouver les termes proportionnels à l'ouverture des facettes qui apparaissent dans la théorie des aberrations géométriques (défauts axiaux et latéraux de mise au point, astigmatisme et courbure de champ), ainsi que des défauts plus spécifiques aux installations solaires (dépointages et déréglages).

(*) Ceci n'est valable que dans le cas d'un héliostat parfait, et ne présentant aucune discontinuité.

A partir de là, nous avons mis au point deux méthodes d'estimation des défauts de réglage appliquées aux héliostats plans et focalisants, et basées sur l'observation de la position du centre de l'image du disque solaire, observée à travers les surfaces réflectrices : nous avons en effet démontré qu'au premier ordre, les défauts de réglage n'entrainent qu'un décalage de la position idéale de ce point.

L'approximation du premier ordre qui a été développée ici est étroitement liée aux codes de calcul décrits au chapitre précédent: la première nous permet en effet d'évaluer précisément les erreurs de réglage des facettes à partir des répartitions de luminance expérimentales, tandis que les seconds servent à la validation de ces mesures, par comparaison avec les distributions de luminance qu'ils simulent graphiquement. On pourrait donc se reporter tout de suite au chapitre V, qui regroupe les principaux résultats expérimentaux ainsi que les enseignements que nous en avons tirés. Toutefois, nous n'avons pas abordé ici le problème des défauts microscopiques des facettes réflectrices, et n'avons fait qu'effleurer celui de leurs défauts de surface. En réalité ceux-ci sont presque impossibles à prendre en compte dans les équations des courbes iso-luminance, parce qu'ils sont de caractère aléatoire,et qu'il semble exclu, hormis le cas d'un défaut de courbure pur, de leur attribuer une fonction caractéristique du type de $f(Y_p,Z_p)$.

Par ailleurs, il nous a semblé intéressant de chercher à développer l'expression de E(M') elle-même, telle qu'elle est donnée dans la relation (II-6), et en restant dans le cadre de notre approximation. De tous les termes qui interviennent en effet dans cette relation, l'angle ϵ est certainement le plus complexe, et dès lors le plus gros du travail est déjà réalisé.

C'est en gardant ces deux idées à l'esprit que nous allons maintenant tenter d'établir une expression approchée de l'intégrale de la densité de flux.